

### Problema săptămânii 224

Ana și Bogdan joacă un joc pe o tablă în forma unui romb cu latura de lungime  $n$  constând din două triunghiuri echilaterale împărțite în triunghiuri echilaterale de latură 1 ( $n = 3$  în figură). Fiecare jucător are câte un jeton. La începutul jocului, jetoanele sunt poziționate în triunghiurile unitate cel mai de sus, respectiv cel mai de jos. Jucătorii mută alternativ, o mutare constând din a-și muta jetonul dintr-un triunghi într-un triunghi vecin (adică unul cu care acesta are o latură comună). Un jucător câștigă jocul fie capturând jetonul adversarului (adică mutând în triunghiul în care se află jetonul acestuia), fie ajungând în triunghiul de pornire al adversarului. Dacă Ana mută prima, are vreunul din cei doi jucători strategie de câștig? Dacă da, care?

*Olimpiadă Estonia, 2009*

**Soluție:** (oficială)

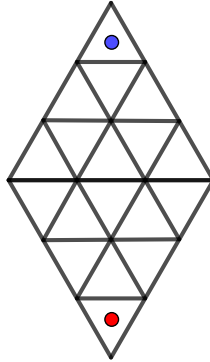
Răspuns: Ana are strategie de câștig.

Arătăm că Bogdan nu poate captura jetonul Anei. Colorăm triunghiurile mici care au vârful în sus cu negru, iar celelalte le lăsăm albe. Atunci oricare două triunghiuri vecine au culori diferite, deci fiecare mutare schimbă culoarea triunghiului pe care se află jetonul mutat. Cum triunghiurile de pornire sunt de culori diferite, după fiecare pereche de mutări jetoanele se vor afla pe triunghiuri de culori diferite, astfel că niciodată o mutare de-a lui Bogdan nu va putea captura jetonul Anei.

Prin urmare, Ana poate fără opreliști lua drumul cel mai scurt către triunghiul de pornire al adversarului. Cum acest drum este la fel de lung și pentru Ana, și pentru Bogdan, Ana va ajunge la destinație înaintea lui Bogdan, deci va câștiga.

**Remarcă:** Am arătat că Ana are o strategie de câștig, anume aceea de a urma, în principiu, drumul cel mai scurt, dar în practică nu am determinat un asemenea drum astfel că, deși am rezolvat problema, încă nu putem fi siguri că, aflați în postura Anei, vom putea cu adevărat câștiga. Însă este ușor de văzut că un drum de lungime minimă are  $4n - 3$  pași, iar un exemplu de un asemenea drum ar fi de-a lungul a două dintre laturile rombului. Într-adevăr, presupunând că Ana pleacă din pătrățelul alb din josul rombului, vom numi *etaje* zonele determinate de liniile orizontale trasate și vom numerota etajele de la 1 la  $2n$  începând de jos (triunghiul de pornire al Anei se află la etajul 1, cel de sosire la etajul  $2n$ ). Nu se poate urca la etajul superior decât dintr-un pătrățel alb. Trebuie urcat de  $2n - 1$  ori și trebuie schimbată culoarea pătrățelului (printr-o mutare care nu schimbă etajul) de  $2n - 2$  ori (după fiecare mutare care schimbă etajul, cu excepția ultimei). Așadar, cel mai scurt drum are  $4n - 3$  pași, iar pentru a câștiga, Ana trebuie să urmeze un asemenea drum.

Am primit soluții de la: *Cezara Danciu, Carol Luca Gasan, Emanuel Mazăre, Ana Duguleanu, Francesca Balaur și Ștefan Gobej.*



**Problem of the week no. 224**

Ana and Bogdan play a game on a rhombus of side length  $n$  consisting of two equilateral triangles divided into equilateral triangular tiles with side length 1 ( $n = 3$  in the figure). Each player has one token. At the beginning of the game, the tokens lie on the topmost and bottommost tile, respectively. Players alternate moves by sliding their token one step to an adjacent tile (tiles are adjacent if they share a side). A player wins the game by capturing his opponent's token (moving his own token to the same tile where the opponent's token lies); or by reaching his opponent's starting tile. Suppose Ana makes the first move. Does either of the players (who?) have a winning strategy?

*Estonian Olympiad, 2009*

A solution can be found here (page 9).