Problema săptămânii 221

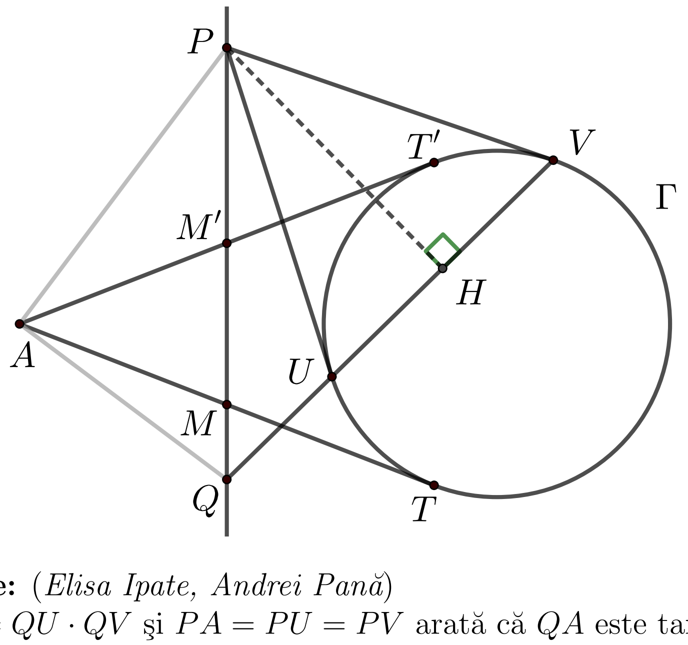
Fie A un punct exterior unui cerc Γ. Tangentele din A intersectează cercul în punctele T şi T'. Fie M şi M' mijloacele segmentelor $[AT]$, respectiv $[AT']$. Fie P un punct pe dreapta MM' şi să notăm cu $[UV]$ coarda din cercul Γ cu proprietatea că PU şi PV sunt tangente la Γ. Dreapta UV intersectează MM' în Q. Demonstraţi că triunghiul PAQ este dreptunghic.

Soluţie:
Considerăm punctul A ca fiind un cerc, cu centrul în A, având raza 0. Cum $MA = MT$, punctul M aparţine axei radicale a cercurilor A şi Γ. La fel, şi M' aparţine acestei axe radicale, deci şi P şi Q sunt pe aceasta. Rezultă că atât P cât şi Q au puteri egale faţă de cercurile A şi Γ, adică $PA = PU = PV$, respectiv $QA^2 = QU \cdot QV$. Dacă H este piciorul perpendicularei din P pe UV, atunci H este mijlocul lui $[UV]$ şi avem:

$$PA^2 + QA^2 = PU^2 + QU \cdot QV = PU^2 + (QH - HU)(QH + HU) =$$

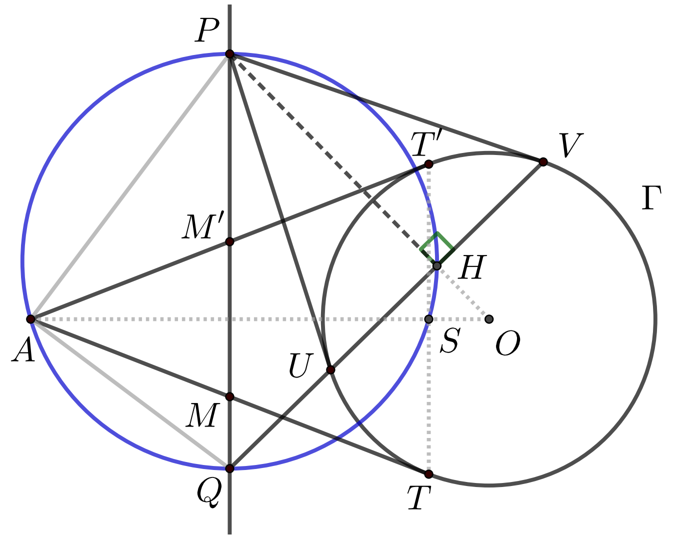
$$PU^2 + QH^2 - HU^2 = QH^2 + PH^2 = PQ^2,$$

deci triunghiul PAQ este dreptunghic în A.



Altă finalizare: (*Elisa Ipate, Andrei Pană*)
Relaţiile $QA^2 = QU \cdot QV$ şi $PA = PU = PV$ arată că QA este tangentă la cercul circumscris triunghiului AUV (care are centrul în P), deci $QA \perp PA$.
Altfel spus: (*Tashi Diaconescu, Ana Boiangiu*)
Dacă Ω este cercul circumscris lui AUV, atunci UV este axa radicală a cercurilor Ω şi Γ, PQ este axa radicală a cercurilor A şi Γ, deci $\{Q\} = PQ \cap UV$ este centrul radical al celor trei cercuri. Cercurile A şi Ω fiind tangente, rezultă că QA este tangentă la Ω, deci perpendiculară pe raza PA.

Remarcă: Dacă S este mijlocul lui $[TT']$, punctele A, S şi H se află pe cercul de diametru $[PQ]$.



Vă semnalăm o altă problemă care se poate rezolva folosind axa radicală a două cercuri, dintre care unul de rază 0.

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB < AC$. Punctele E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Fie M mijlocul segmentului $[BC]$. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC taie BC în P, iar EF taie paralela prin A la BC în Q. Demonstraţi că PQ este perpendiculară AM. (Olimpiadă Polonia, 2018)

Alte probleme pe aceeaşi idee găsiţi în materialul lui Nathan Ramesh, alături.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre, Francesca Balaur, Ana Duguleanu, Cezara Danciu, Ştefan Gobej, Elisa Ipate, Andrei Pană, Tashi Diaconescu* şi *Ana Boiangiu.*

Problem of the week no. 221

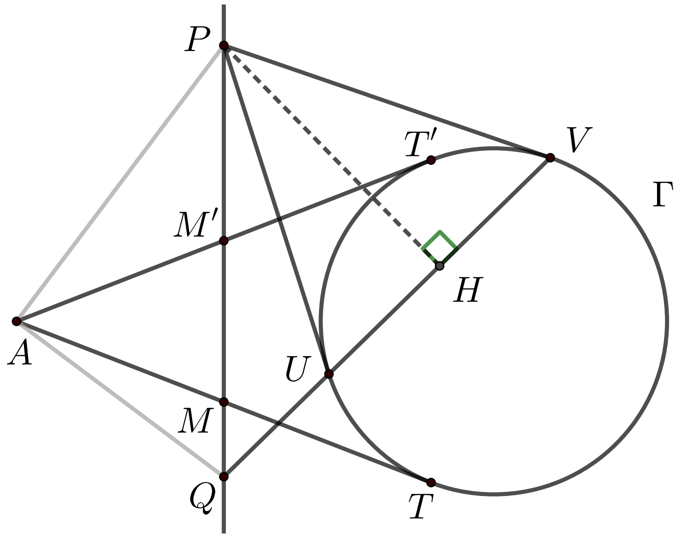
Let A be a point outside a circle Γ. The tangents from A meet the circle at T and T'. Let M and M' be the midpoints of line segments $[AT]$ and $[AT']$, respectively. Consider a point P on the line MM' and let $[UV]$ be a chord of circle Γ such that PU and PV are tangent to Γ. The line UV meets MM' at Q. Prove that the triangle PAQ is right.

Solution:
Consider the point A to be a circle, of radius 0, centered at A. As $MA = MT$, point M belongs to the radical axis of circles A and Γ, and so does M'. It follows that points P and Q also belong to this radical axis, i.e. both have the same power with respect to circles A and Γ. This means that $PA = PU = PV$ and $QA^2 = QU \cdot QV$. If H is the foot of the perpendicular dropped from P onto UV,

then H is the midpoint of the line segment $[UV]$ and we have:

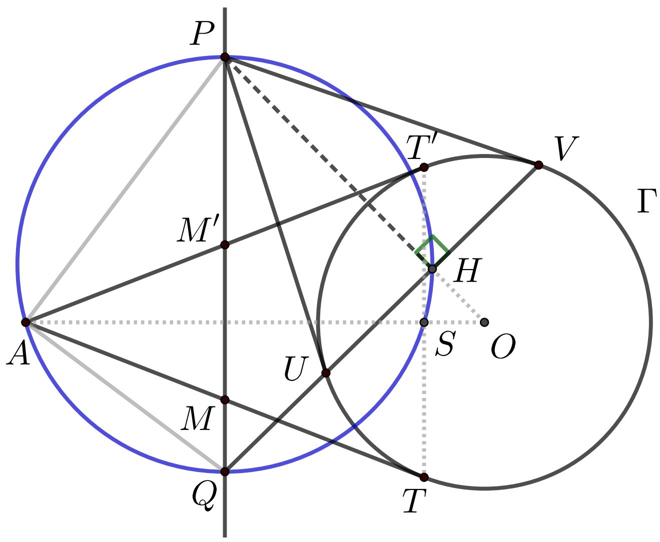
$$PA^2 + QA^2 = PU^2 + QU \cdot QV = PU^2 + (QH - HU)(QH + HU) =$$
$$PU^2 + QH^2 - HU^2 = QH^2 + PH^2 = PQ^2,$$

which shows that triangle PAQ has a right angle at A.



Another finishing: (*Elisa Ipate, Andrei Pană*)
From $QA^2 = QU \cdot QV$ and $PA = PU = PV$ it follows that QA is tangent to the circumcircle of triangle AUV (whose center is P), therefore $QA \perp PA$.

Remark: If S is the midpoint of the line segment $[TT']$, then points A, S and H all lie on the circle of diameter $[PQ]$.



Another problem that can be solved using the radical axis of two circles, one of which being reduced to a point: Polish Olympiad, 2018.

For more such problems, see Nathan Ramesh's material, "Degenerate Circles".