Problema săptămânii 220

Care este numărul maxim de numere întregi distincte care pot fi scrise într-un rând astfel încât suma oricăror 11 numere consecutive să fie 100 sau 101?

Turneul Oraşelor, 2020

Altă formulare: Aflaţi n maxim pentru care există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, distincte două câte două, astfel încât $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+10} \in \{100, 101\}$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n-10\}$.

Soluţie:
Vom arăta că numărul maxim de numere din şir este 22.

Mai întâi demonstrăm că nu pot exista mai mult de 22 de numere într-un şir cu proprietatea din enunţ. Presupunem că ar exista 23 de numere cu proprietatea din enunţ. Le notăm, în ordinea din şir, $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$. Atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} \in \{100, 101\}$ şi $a_2 + a_3 + \ldots + a_{12} \in \{100, 101\}$. Dar, cum cele două sume diferă prin $a_1 - a_{12} \neq 0$ (căci $a_1 \neq a_{12}$), una din ele este 100, cealaltă 101. Mai general, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, avem că una dintre sumele $s_k = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+10}$ şi $s_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+11}$ este 100, iar cealaltă 101. Aşadar, paritatea sumei s_k depinde numai de paritatea lui k. Atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{23} = a_1 + s_2 + s_{13} = s_1 + s_{12} + a_{23}$. Dar $s_2 + s_{13} = s_1 + s_{12} = 201$ (unul din termeni fiind 100, celălalt 101), deci obţinem $a_1 = a_{23}$. Aşadar nu putem avea mai mult de 22 de numere cu proprietatea din enunţ.

Un exemplu (dat de *Cezara Danciu*) de şir de 22 de numere cu proprietatea din enunţ este

$$100, -2, 2, -4, 4, -6, 6, -8, 8, -10, 10, 101, -3, 3, -5, 5, -7, 7, -9, 9, -11, 11.$$

Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, David Ghibu, Carol Luca Gasan, Francesca Balaur, Radu Şerban, Emanuel Mazăre, Radu Stoleriu, Ştefan Gobej, Ana Duguleanu* şi *Elisa Ipate.*

Problem of the week no. 220

What is the maximum number of distinct integers in a row such that the sum of any 11 consecutive integers is either 100 or 101?

Tournament of Towns, 2020

Solution:
we prove that the maximum number of term such a sequence can have is 22.

First, we prove that one can not have more than 22 numbers in such a sequence. We assume there are 23 such numbers in a sequence, $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$. Then, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} \in \{100, 101\}$ and $a_2 + a_3 + \ldots + a_{12} \in \{100, 101\}$. But the difference between the two sums is $a_1 - a_{12} \neq 0$ (because $a_1 \neq a_{12}$), therefore one is 100, the other 101. More generally, for all $k \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, one of the sums $s_k = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+10}$ and $s_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+11}$ is 100, the other 101. Thus, the sums s_k equal to 100 and equal to 101 alternate, so its value only depends on the parity of k. Then $a_1 + a_2 + \ldots + a_{23} = a_1 + s_2 + s_{13} = s_1 + s_{12} + a_{23}$. But $s_2 + s_{13} = s_1 + s_{12} = 201$ (one of the terms being 100, the other 101), which means that $a_1 = a_{23}$. We conclude that there can not be more than 22 terms in such a sequence.

Un example of a sequence of 22 numbers that satisfy the statement is

$$100, -2, 2, -4, 4, -6, 6, -8, 8, -10, 10, 101, -3, 3, -5, 5, -7, 7, -9, 9, -11, 11.$$