Problema săptămânii 219

Numerele naturale nenule a, b, c, d satisfac relaţia $ad = b^2 + bc + c^2$. Arătaţi că numărul $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ este compus.

Concursul Arany Dániel, 2020

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Avem: $ad = b^2 + bc + c^2 \Leftrightarrow ad - bc - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot \left(ad - bc - b^2 - c^2\right) = \left(a^2 + 2ad + d^2\right) - \left(b^2 + 2bc + c^2\right) =$$

$$= (a+d)^2 - (b+c)^2 = (a-b-c+d)(a+b+c+d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a-b-c+d)(a+b+c+d)}. \quad (1)$$

Ţinând acum seama de relaţia (1), faptul că numărul: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ – nu este prim, revine la a arăta că nu există numere: $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, care satisfac condiţia: $ad = b^2 + bc + c^2$ şi $a - b - c + d = 1$.

Să presupunem, prin absurd că: $(\exists) a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, pentru care avem: $\begin{cases} a - b - c + d = 1 \\ ad = b^2 + bc + c^2. \end{cases}$

Dacă: $a - b - c + d = 1$, atunci relaţia (1) devine: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$. (2)

Însă, dacă $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^2 \geq x$, egalitatea având loc doar dacă: $x = 1$. Aşa că, relaţia (2) are loc doar

dacă: $a = b = c = d = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} ad = 1 \\ b^2 + bc + c^2 = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ad \neq b^2 + bc + c^2.$ ■

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Cezara Danciu, Emanuel Mazăre, Radu Şerban, Francesca Balaur, Elisa Ipate, Radu Stoleriu, Carol Luca Gasan, Ana Duguleanu, Andrei Pană, Ştefan Gobej, Adrian Zanca* şi *Ana Boiangiu.*

Problem of the week no. 219

Positive integers a, b, c, d satisfy $ad = b^2 + bc + c^2$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ is a composite number.

Arany Dániel Contest, 2020

Solution: We have $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+d)^2 - 2ad + b^2 + c^2 = (a+d)^2 - 2(b^2 + bc + c^2) + b^2 + c^2 = (a+d)^2 - (b+c)^2 = (a+b+c+d)(a+d-b-c)$, so all we need to prove is that $a + b + c + d > 1$ (which is clear) and $a + d - b - c > 1$. As $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ and $a + b + c + d$ are positive, so is $a + d - b - c$. Assuming $a + d - b - c = 1$, we would have $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$. As $n^2 \geq n$ for all positive integer n, with equality only when $n = 1$, the last equality only occurs when $a = b = c = d = 1$, in which case $a + d - b - c \neq 1$. Thus, $a + d - b - c > 1$, and $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ is composite.