Problema săptămânii 218

Pentru un număr întreg n ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ are o soluţie (x, y, z) (nu neapărat unică) în mulţimea numerelor întregi. Arătaţi că şi ecuaţia $x^2 + y^2 - xy = n$ are o soluţie (x, y) (nu neapărat unică) în mulţimea numerelor întregi.

Alexandr Yuran, Turneul Oraşelor, 2020

Soluţie: Varianta scurtă:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x - y)^2 - (x - y)(z - y) + (z - y)^2$$

Varianta lungă:
Avem $2n = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = a^2+b^2+2(a+b)^2$, unde $a = x-y$, $b = y-z$ sunt numere întregi. Obţinem $n = a^2 + b^2 + ab$, deci ecuaţia $x^2 + y^2 - xy = n$ are soluţia $(a, -b)$.

Remarcă: Evident, soluţia de mai sus este sugerată de una din demonstraţiile clasice ale inegalităţii $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$: înmulţim cu 2 şi o scriem ca sumă de trei pătrate.

Remarcă: (*Carol Luca Gasan*)
În condiţiile din ipoteză, soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 - xy = n$ pot fi alese chiar naturale. Dacă (x, y, z) este o soluţie a primei ecuaţii, putem presupune $x \leq y \leq z$ şi atunci $a = z - x$ şi $b = y - x$ sunt numere naturale care satisfac $a^2 + b^2 - ab = n$.

Am primit soluţii de la *Cezara Danciu, Emanuel Mazăre, Andrei Pană, Francesca Balaur, Radu Stoleriu, David Ghibu, Carol Luca Gasan, Ştefan Gobej, Ana Duguleanu, Ana Boiangiu* şi *Radu Şerban.*

Problem of the week no. 218

For some integer n the equation $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ has an integer solution x, y, z. Prove that the equation $x^2 + y^2 - xy = n$ also has an integer solution x, y.

Alexandr Yuran, Tournament of Towns, 2020

Solution: short version:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x - y)^2 - (x - y)(z - y) + (z - y)^2$$

long version:
We have $2n = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = a^2 + b^2 + 2(a + b)^2$, where $a = x - y$, $b = y - z$ are integers. We obtain $n = a^2 + b^2 + ab$, which shows that the equation $x^2 + y^2 - xy = n$ has the solution $(a, -b)$.

Remark: Clearly, the long version is inspired by a classical proof of the inequality $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$: multiply by 2 and write the LHS as a sum of three squares.