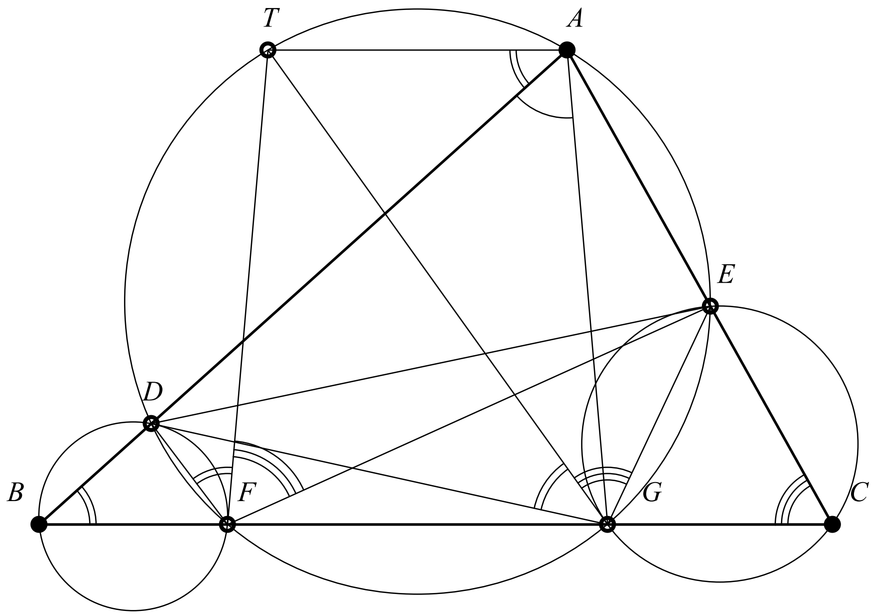
Problema săptămânii 217

Fie ABC un triunghi oarecare şi $F, G \in (BC)$ astfel încât F să se găsească între punctele B şi G. Notăm apoi cu D şi E cel de-al doilea punct de intersecţie a cercului circumscris triunghiului AFG cu latura $[AB]$ şi respectiv $[AC]$, iar cu T punctul de intersecţie a tangentei în F la cercul circumscris triunghiului BFD cu tangenta în G la cercul circumscris triunghiului CEG. Arătaţi că $AT \parallel BC$.

lista scurtă OIM, 2019



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*), prin redefinirea punctului T, ca fiind cel de al doilea punct de intersecţie al cercului circumscris ΔAFG, cu paralela dusă prin vârful A la latura $[BC]$.

Pentru a arăta acum că punctul T – astfel redefinit, coincide cu punctul purtând acelaşi nume, din enunţul problemei date, revine la a arăta: $FT \cap \odot BFD = \{F\}$ (adică, dreapta TF – este tangentă la $\odot BFD$) şi $GT \cap \odot CEG = \{G\}$ (adică, dreapta TG – este tangentă la $\odot CEG$).

Însă, din:

$$\left.\begin{aligned} ATDF - inscriptibil &\Rightarrow \widehat{DFT} \equiv \widehat{DAT} \\ AT \parallel BC &\Rightarrow \widehat{DAT} \equiv \widehat{ABC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{DFT}\right) = m\left(\widehat{ABC}\right) = B \; (1) \Rightarrow \boxed{FT \cap \odot BFD = \{F\}};$$

iar din:

$$\left.\begin{aligned} ADFE - inscriptibil &\Rightarrow m\left(\widehat{DFE}\right) = 180^0 - m\left(\widehat{DAE}\right) = 180^0 - A \\ TDFG - inscriptibil &\Rightarrow m\left(\widehat{DGT}\right) = m\left(\widehat{DFT}\right) \overset{(1)}{=} B \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{TGE}\right) =$$

$$= m\left(\widehat{DGE}\right) - m\left(\widehat{DGT}\right) = 180^0 - A - B = C = m\left(\widehat{GCE}\right) \Rightarrow \widehat{TGE} \equiv \widehat{GCE} \Leftrightarrow \boxed{GT \cap \odot CEG = \{G\}}. \blacksquare$$

Puteţi citi şi soluţia oficială şi alte soluţii pe AoPS.

Am primit soluţii de la *Cezara Danciu, David Ghibu, Tashi Diaconescu, Andrei Pană, Radu Stoleriu, Ana Duguleanu, Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre, Francesca Balaur* şi *Ana Boiangiu.*

Problem of the week no. 217

Let ABC be a triangle. Circle Γ passes through A, meets segments AB and AC again at points D and E respectively, and intersects segment BC at F and G such that F lies between B and G. The tangent to circle BDF at F and the tangent to circle CEG at G meet at point T. Suppose that points A and T are distinct. Prove that line AT is parallel to BC.

IMO ShortList, 2019

official solution
Other solutions can be found on AoPS.