24th Junior Balkan Mathematical Olympiad (JBMO) 9 - 13 September 2020
Mathematical Society of South Eastern Europe (MASSEE)

Language: **Romanian**

vineri, 11 septembrie 2020

Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac sistemul de ecuaţii:

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ şi } a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\angle BAC)=90^\circ$ şi fie E piciorul perpendicularei din A pe BC. Fie $Z \neq A$ un punct pe dreapta AB astfel încât $AB = BZ$. Fie (c) cercul circumscris triunghiului AEZ. Fie D al doilea punct de intersecţie a lui (c) cu ZC şi fie F punctul diametral opus lui D în cercul (c). Fie P punctul de intersecţie a dreptelor FE şi CZ. Dacă tangenta în Z la cercul la (c) intersectează PA în punctul T, demonstraţi că punctele T, E, B, Z sunt conciclice.

Problema 3. Alice şi Bob joacă următorul joc: Alice alege o mulţime $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \geqslant 2$ este un număr natural. Apoi, începând cu Bob, ei aleg alternativ câte un număr din mulţimea A, respectând următoarele condiţii: iniţial Bob alege orice număr doreşte, apoi numărul ales la fiecare pas trebuie să fie diferit de toate numerele alese anterior şi trebuie să difere cu 1 de un număr deja ales. Jocul se termină atunci când toate numerele din mulţimea A au fost alese.
Alice câştigă dacă suma tuturor numerelor alese de ea este număr compus. În caz contrar câştigă Bob. Stabiliţi care din cei doi jucători are strategie de câştig.

Problema 4. Determinaţi toate numerele prime p şi q pentru care

$$1+\frac{p^q-q^p}{p+q}$$

este număr prim.