

Problema săptămânii 215

Care este cel mai mare număr natural care nu se scrie ca sumă dintre un multiplu pozitiv a lui 42 și un număr natural compus?

Soluție:

Răspunsul este 215.

Observăm cu ușurință că scăzând din numărul 215 un multiplu pozitiv a lui 42 obținem mereu un număr natural prim sau un număr negativ.

Presupunem, prin absurd, că există un număr natural n , $n > 215$ astfel încât $n - 42k$ să fie prim oricare ar fi k un număr natural nenul, $k \leq \frac{n}{42}$.

Evident n trebuie să fie impar, deoarece, în caz contrar $n - 42$ ar fi un număr par mai mare decât 2, care ar fi compus, ceea ce conduce la o contradicție.

Vom analiza mai multe cazuri în funcție de ultima cifră a lui n .

- 1) Dacă n are ultima cifră 1 atunci $n - 126$ ar avea ultima cifră 5, deci acesta este un număr divizibil cu 5 strict mai mare decât 5. Astfel acesta ar fi compus, contradicție.
- 2) Dacă n are ultima cifră 3 atunci $n - 168$ ar avea ultima cifră 5, deci acesta este un număr divizibil cu 5 strict mai mare decât 5. Astfel acesta ar fi compus, contradicție.
- 3) Dacă n are ultima cifră 5 atunci $n - 210$ ar avea ultima cifră 5, deci acesta este un număr divizibil cu 5 strict mai mare decât 5. Astfel acesta ar fi compus, contradicție.
- 4) Dacă n are ultima cifră 7 atunci $n - 42$ ar avea ultima cifră 5, deci acesta este un număr divizibil cu 5 strict mai mare decât 5. Astfel acesta ar fi compus, contradicție.
- 5) Dacă n are ultima cifră 9 atunci $n - 84$ ar avea ultima cifră 5, deci acesta este un număr divizibil cu 5 strict mai mare decât 5. Astfel acesta ar fi compus, contradicție.

Din cele 5 cazuri analizate, tragem concluzia că dacă $n > 215$ atunci n se poate scrie ca sumă dintre un multiplu pozitiv a lui 42 și un număr natural compus, presupunerea fiind falsă.

În concluzie răspunsul este 215.

