

Problema săptămânii 215

Care este cel mai mare număr natural care nu se scrie ca suma dintre un multiplu pozitiv al lui 42 și un număr natural compus?

Concursul AIME, 1995

Soluție: Este evident că dacă împărțim numărul căutat cu rest la 42, restul nu poate fi un număr compus. El poate fi așadar numai 0, 1 sau un număr prim mai mic ca 42. În plus, numărul căutat, $n = 42k + r$, cu $0 \leq r < 42$, trebuie să aibă proprietatea că fiecare din numerele $42 + r$, $42 \cdot 2 + r$, \dots , $42 \cdot (k - 1) + r$ sunt prime.

Vom arăta că numărul căutat este 215. El se scrie $42 + 173$, $2 \cdot 42 + 131$, $3 \cdot 42 + 89$, $4 \cdot 42 + 47$ și $5 \cdot 42 + 5$, iar fiecare din numerele 173, 131, 89, 47 și 5 este prim, deci 215 nu se scrie ca suma dintre un multiplu pozitiv al lui 42 și un număr natural compus. Arătăm că numerele mai mari ca 215 se scriu ca suma dintre un multiplu pozitiv al lui 42 și un număr natural compus. Analizăm resturile posibile la împărțirea cu 42.

- $r = 0$. Cum $2 \cdot 42 + 0$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 84.
- $r = 1$. Cum $2 \cdot 42 + 1$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 85.
- $r = 2$. Cum $42 + 2$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 44.
- $r = 3$. Cum $42 + 3$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 45.
- Cu $r = 5$ am văzut că cel mai mare număr de forma $42k + 5$ cu proprietatea din enunț este 215.
- $r = 7$. Cum $42 + 7$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 49.
- $r = 11$. Cum $2 \cdot 42 + 11$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 95, mai mic ca 215.
- $r = 13$. Cum $42 + 13$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 55, mai mic ca 215.
- $r = 17$. Cum $3 \cdot 42 + 17$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 143, mai mic ca 215.
- $r = 19$. Cum $3 \cdot 42 + 19$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 145, mai mic ca 215.
- $r = 23$. Cum $42 + 23$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 65, mai mic ca 215.
- $r = 29$. Cum $3 \cdot 42 + 29$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 155, mai mic ca 215.
- $r = 31$. Cum $2 \cdot 42 + 31$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 115, mai mic ca 215.
- $r = 37$. Cum $2 \cdot 42 + 37$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această formă care are proprietatea din enunț este 121, mai mic ca 215.
- $r = 41$. Cum $2 \cdot 42 + 19$ este compus, în acest caz cel mai mare număr de această

formă care are proprietatea din enunț este 125, mai mic ca 215.

În concluzie, cel mai mic număr cu proprietatea din enunțul problemei săptămânii 215 este ... 215.

O soluție mai simplă este cea dată de *Radu Șerban*.

Am mai primit soluții de la: *Emanuel Mazăre, David Ghibu, Carol Luca Gasan, Ștefan Gobej și Cezara Danciu*.

Problem of the week no. 215

What is the largest positive integer that is not the sum of a positive integral multiple of 42 and a positive composite integer?

AIME, 1995

English solutions can be found on AoPS. The first solution has a small error. Can you spot it?