Problema săptămânii 214

Arătaţi că orice număr raţional pozitiv se scrie sub forma $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$.

lista scurtă OIM 1999

Soluţie: Este evident că numărul raţional 1 se scrie sub forma din enunţ şi că, dacă un număr r se scrie sub această formă, atunci şi $\dfrac{1}{r}$ se scrie sub această formă. Aşadar, este suficient să arătăm că orice număr naţional mai mare ca 1 se scrie sub forma din enunţ.

Vom demonstra mai întâi că orice număr raţional $r \in (1, 2)$ se scrie sub forma $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3}$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}$ şi vom alege numerele b şi c astfel încât $b \neq c$, dar $a^2-ab+b^2 = a^2-ac+c^2$. Ultima egalitate revine la $(b-c)(b+c-a) = 0$, deci dacă alegem b şi c astfel încât $b+c = a$, atunci $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{2b+c}{2c+b}$. Din $\dfrac{2b+c}{2c+b} = r = \dfrac{p}{q}$, cu $q < p < 2q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, rezultă imediat că putem alege $b = 2p-q$, $c = 2q-p$ şi $a = d = p+q$ numere naturale cu proprietatea din enunţ.

Orice număr $r \geq 2$ aparţine unui interval de forma $\left[\left(\dfrac{216}{125}\right)^n, \left(\dfrac{216}{125}\right)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\dfrac{125^n}{216^n} \cdot r \in \left[1, \dfrac{216}{125}\right) \subset [1, 2)$ se scrie sub forma $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, deci $r = \dfrac{(6^n \cdot a)^3 + (6^n \cdot b)^3}{(5^n \cdot c)^3 + (5^n \cdot d)^3}$, adică r se scrie sub forma din enunţ.

Am primit soluţii de la: *Radu Şerban, Carol Luca Gasan, Darius Chiţu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 214

Prove that every positive rational number can be written as $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, where a, b, c, d are positive integers.

IMO ShortList 1999

Solution: It is clear that the rational number 1 can be written in the desired form. Also, if a positive rational number r can be written in this form, then so can $\dfrac{1}{r}$. Thus, it is sufficient to prove that any rational larger than 1 can be written as in the statement.

First, we prove that any rational $r \in (1, 2)$ can be written as $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3}$, with $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

We have $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}$ and we can choose positive integers b and c such that $b \neq c$, but $a^2-ab+b^2 = a^2-ac+c^2$. The last equality means $(b-c)(b+c-a) = 0$, therefore choosing b and c such that $b+c = a$, gives $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{2b+c}{2c+b}$. From $\dfrac{2b+c}{2c+b} = r = \dfrac{p}{q}$, with $q < p < 2q$, $p, q \in \mathbb{N}$, it immediately follows that one can choose $b = 2p-q$, $c = 2q-p$ and $a = d = p+q$ in order to get $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3} = \dfrac{p}{q} = r$.

Any number $r \geq 2$ belongs to one of the intervals $I_n = \left[\left(\dfrac{216}{125}\right)^n, \left(\dfrac{216}{125}\right)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

If $r \in I_n$, then $\dfrac{125^n}{216^n} \cdot r \in \left[1, \dfrac{216}{125}\right) \subset [1, 2)$ can be written as $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, therefore $r = \dfrac{(6^n \cdot a)^3 + (6^n \cdot b)^3}{(5^n \cdot c)^3 + (5^n \cdot d)^3}$, i.e. r can be written in the desired form.