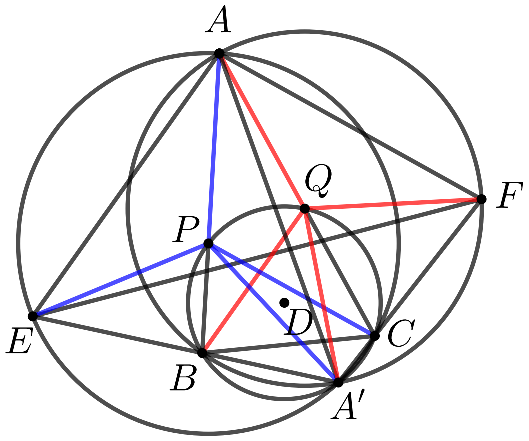
Problema săptămânii 213

Triunghiul ascuţitunghic ABC are $m(\sphericalangle BAC) < 45°$. Punctul D este situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât $BD = CD$ şi $m(\sphericalangle BDC) = 4m(\sphericalangle BAC)$. Punctul E este simetricul lui C faţă de dreapta AB, iar punctul F este simetricul lui B faţă de dreapta AC. Demonstraţi că dreptele AD şi EF sunt perpendiculare.

Concursul BAMO, 2010

O soluţie frumoasă dată de Evan O'Dorney este disponibilă, în limba engleză, aici.

Configuraţia este una destul de interesantă: dacă notăm cu P şi Q punctele în care cercul $\mathscr{C}$ de centru D şi rază BD taie a doua oară dreptele AB, respectiv AC şi cu A' simetricul lui A faţă de PQ, atunci $B \in A'E$, $C \in A'F$, iar patrulaterele $AEA'C$ şi $AFA'B$ sunt inscriptibile. Pare să fie adevărat că dreapta PQ este polara punctului A faţă de cercul $\mathscr{C}$.



Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Ana Duguleanu, Emanuel Mazăre* şi *Ana Boiangiu.*
Soluţiile primite se bazează pe trigonometrie (teorema sinusurilor şi a cosinusului) şi caracterizarea patrulaterului ortodiagonal (primii trei), respectiv numere complexe (Ana Boiangiu).

Remarcă: (*Titu Zvonaru*)
Este adevărată și următoarea reciprocă: dacă perpendiculara din A pe EF intersectează mediatoarea segmentului $[BC]$ în punctul D, atunci $m(\sphericalangle BDC) = 4m(\sphericalangle BAC)$.

Problem of the week no. 213

Acute triangle ABC has $\sphericalangle BAC < 45°$. Point D lies in the interior of triangle ABC so that $BD = CD$ and $\sphericalangle BDC = 4\sphericalangle BAC$. Point E is the reflection of C across line AB, and point F is the reflection of B across line AC. Prove that lines AD and EF are perpendicular.

Bay Area Mathematical Olympiad, 2010

A beautiful solution by Evan O'Dorney is available here.