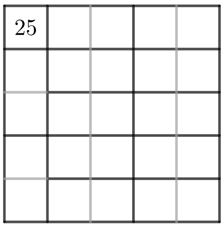
Problema săptămânii 212
Fie n un număr natural dat. Două persoane scriu pe rând numerele naturale de la 1 la 25 în câmpurile unui tabel 5×5 astfel încât fiecare număr să se scrie o singură dată. Dacă după completarea întregului tabel, suma numerelor dintr-o coloană oarecare sau dintr-o linie oarecare este egală cu n, atunci câștigă cel care a început jocul. În caz contrar, câștigă adversarul său. Cine câștigă la un joc corect și care este strategia de câștig, dacă:
a) $n = 75$
b) $n = 70$?

Olimpiadă Moldova, 2020

Soluţia 1:
a) Primul jucător are strategie de câştig: el scrie numărul 25 în colţul din stânga sus, grupează numerele rămase în perechi disjuncte de forma $\{k, 25-k\}$ şi pavează zona rămasă cu 12 dominouri (dreptunghiuri 1×2 sau 2×1), completând restul liniei 1 cu două dominouri plasate orizontal. O posibilă pavare ar putea fi cea din figura de mai jos:



De fiecare dată când al doilea jucător înscrie un număr într-un pătrăţel, primul jucător scrie numărul pereche în celălalt pătrăţel al aceluiaşi domino. (Mereu al doilea jucător ,,începe” dominoul, iar primul jucător completează dominoul.) Suma numerelor din fiecare domino fiind 25, la sfârşit, pe prima linie vom avea cinci numere cu suma 75. (Dacă facem pavarea ca în figura de mai sus, vom avea, în plus, şi suma numerelor de pe prima coloană tot 75.)

b) Jucătorul care începe jocul are strategie de câștig. El plasează în câmpul din colțul din stânga sus al tabelului numărul 24. După aceasta, împarte câmpurile tabelului în perechi, ca mai sus (pavează cu aceleaşi dominouri), iar numerele rămase le împarte în 11 perechi ,,bune”, cu suma egală cu 23: $\{k, 23-k\}$, $1 \leq k \leq 11$ și perechea ,,rea” $\{23, 25\}$. În jocul ulterior, de câte ori al doilea jucător scrie un număr dintr-o pereche, primul jucător scrie perechea acestuia în câmpul rămas liber din acelaşi domino. Astfel, fie pe linia pe care se află 24, fie pe coloana pe care se află acesta, mai apar două perechi bune care duc suma numerelor de pe respectiva linie sau coloană la 70.

Soluţia 2: (*David Ghibu, Ana Duguleanu, Emanuel Mazăre*)
a) Primul jucător are strategie de câştig. El începe prin a scrie numărul 25 undeva în tabel, pe linia ℓ, coloana c, apoi împarte tabla în două zone: celelalte 4

pătrăţele de pe coloana c, respectiv cele 20 de pătrăţele nesituate pe coloana c. Observăm că ambele zone au un număr par de pătrăţele. Stretegia primului jucător este următoarea: dacă al doilea jucător scrie într-un pătrăţel dintr-o anumită zonă numărul $x \in \{1, 2, \ldots, 24\}$, primul jucător scrie numărul $25 - x$ într-un alt pătrăţel al aceleiaşi zone. Observăm că el poate mereu face acest lucru pentru că:
- dacă într-o zonă jucătorul 2 a mai avut unde să scrie un număr, atunci şi primul jucător mai are pătrăţel liber pentru că fiecare zonă conţine un număr par de pătrăţele, iar după fiecare mutare a jucătorului 2 fiecare zonă va avea un număr par de pătrăţele libere;
- dacă jucătorul 2 a putut alege numărul x acesta nefiind ales anterior, atunci şi primul jucător poate alege numărul $25 - x$ deoarece după fiecare pereche de mutări o pereche $\{x, 25 - x\}$ este epuizată complet.
În final, suma numerelor de pe coloana c va fi 75.

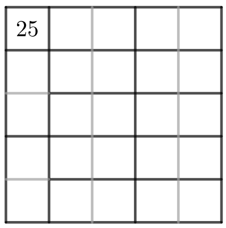
b) Primul jucător are strategie de câştig. El începe prin a scrie numărul 20 undeva în tabel, pe linia ℓ, coloana c, apoi împarte tabla în trei zone: celelate 4 pătrăţele de pe linia ℓ, celelalte 4 pătrăţele de pe coloana c, respectiv cele 16 de pătrăţele nesituate pe nici pe linia ℓ, nici pe coloana c. Observăm că fiecare zonă are un număr par de pătrăţele. Stretegia primului jucător este următoarea: dacă al doilea jucător scrie într-un pătrăţel dintr-o anumită zonă numărul $x \in \{1, 2, \ldots, 25\} \setminus \{5, 20, 25\}$, primul jucător scrie numărul $25 - x$ într-un alt pătrăţel al aceleiaşi zone. Dacă al doilea jucător scrie unul din numerele 5 şi 25 într-un pătrăţel al unei zone, atunci primul jucător va scrie, în aceeaşi zonă, celălalt număr. Ca mai sus, se vede uşor că aceste mutări sunt mereu posibile.
La sfârşit este posibil ca numerele 5 şi 25 să se afle pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană cu 20, dar se vor afla în aceeaşi zonă. Astfel, fie pe linia ℓ, fie pe coloana c, vom avea, pe lângă 20, două perechi de numere având suma 25, deci suma numerelor pe respectiva linie/coloană este 70.

Problem of the week no. 212

Let n be a positive integer. Ann and Bob alternatively write one of the numbers from 1 to 25 in the cells of a 5×5 table such that each number only appears once. If, after the filling is completed, there is is a line or a column in which the sum is n, Ann wins, otherwise Bob wins. Which of the two players has a winning strategy and what is that strategy if:
a) $n = 75$
b) $n = 70$?

Moldova Olympiad, 2020

Solution 1:
a) Ann has a winning strategy: she writes the number 25 in the upper left corner, groups the remaining numbers into disjoint pairs of the form $\{k, 25-k\}$ (the sum of the two numbers within one pair being 25) and covers the remaining surface with 12 dominoes (rectangles 1×2 or 2×1), such that the rest of the first line is covered by two horizontal dominoes. A possible way of tiling the table is the one below:



Whenever Bob writes a number into one of the cells of a domino, Ann writes the pair of the number written by Bob into the other cell of the same domino. (Every time it will be Bob the one who "starts" a new domino, and Ann the one who fills it.) The sum of the numbers within each domino is, thus, 25, so, the sum of the five numbers written on the first line is 75.

b) It is still Ann who has a winning strategy. She writes the number 24 in the upper left corner, groups the remaining numbers into 11 disjoint pairs of the form $\{k, 23-k\}$ (the sum of the two numbers within one pair being 23 - we call these pairs "good") and one "bad" pair, $\{23, 25\}$. Then, she covers the remaining surface with 12 dominoes, as in the picture above. In the subsequent play, whenever Bob writes a number into one of the cells of a domino, Ann writes the pair of the number written by Bob into the other cell of the same domino. Since there is only one bad pair, either on the first row or on the first column, there will be, apart 24, two good pairs. The sum of these five numbers is 70.

Solution 2: (*David Ghibu, Ana Duguleanu, Emanuel Mazăre*)
a) Ann has a winning strategy. She starts by writing 25 somewhere in the table, on row r, column c, then she divides the table into two zones: the other 4 cells on column c, and the 20 cells not situated on column c. Notice that both zone consist

of an even number of cells. Ann's strategy is the following one: if Bob writes a number $x \in \{1, 2, \ldots, 24\}$ in a cell belonging to a certain zone, Ann writes the number $25 - x$ in another cell of the same zone. She can always do this because:
- if Bob has had an empty cell in which to write x, Ann will have an available cell in the same zone because each zone has an even number of cells and Ann always leaves after her move an even number of empty cells in each zone;
- if Bob was able to choose x, then Ann can also choose the number $25 - x$ because after each of Ann's moves a pair $\{x, 25 - x\}$ is completely erased.

In the end, the sum of the numbers on column c is 75.

b) Ann has a winning strategy. She starts by writing 20 somewhere in the table, on row r, column c, then she divides the table into three zones: the other 4 cells on row r, the other 4 cells on column c, and the 16 cells not situated on row r or column c. Notice that all the zones consist of an even number of cells. Ann's strategy is the following one: if Bob writes a number $x \in \{1, 2, \ldots, 25\} \setminus \{5, 20, 25\}$ in a cell belonging to a certain zone, Ann writes the number $25 - x$ in another cell of the same zone. If Bob writes one of the numbers 5 and 25 into a cell belonging to a certain zone, Ann writes the other number into a cell belonging to the same zone. As above, is is easy to see that she can always do this. In the end, 5 and 25 belong to the same zone, so at least one of the first two zones (row r or column c) has two pairs whose sums are 25. Thus, either on row r or on column c, the sum is $20 + 25 + 25 = 70$.