Generaliări ale Problemei Săptămânii nr.213:

Fie ABC – un triunghi ascuţitunghic, în care: $m\left(\widehat{BAC}\right) < 45^0$; iar D – este acel punct din interiorul său, care satisface condiţiile: $[BD] \equiv [CD]$ şi $m\left(\widehat{BDC}\right) = 4 \cdot m\left(\widehat{BAC}\right)$. Notăm apoi cu E – simetricul punctului C, faţă de dreapta AB; iar cu F – simetricul punctului B, faţă de dreapta AC. Demonstraţi că: $AD \perp EF$.

OBSERVAŢII (*Mihai Miculiţa*):

1). Concluzia problemei este adevărată şi în cazul: $m\left(\widehat{BAC}\right) = 45^0$!

Într-adevăr, dacă:

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{BDC}\right) = 4 \cdot m\left(\widehat{BAC}\right) = 4 \cdot 45^0 = 180^0 \Rightarrow D \in [BC] \\ [DB] \equiv [DC] \end{array}\right\} \Rightarrow D \text{ – este mijlocul laturii } [BC].$$

Aşa că, în cazul $m\left(\widehat{BAC}\right) = 45^0$, problema dată poate fi reformulată astfel:

Fie ABC – un triunghi ascuţitunghic, în care: $m\left(\widehat{BAC}\right) = 45^0$; iar D – este mijlocul laturii $[BC]$. Notăm apoi cu E – simetricul punctului C, faţă de dreapta AB; iar cu F – simetricul punctului B, faţă de dreapta AC. Demonstraţi că: $AD \perp EF$.

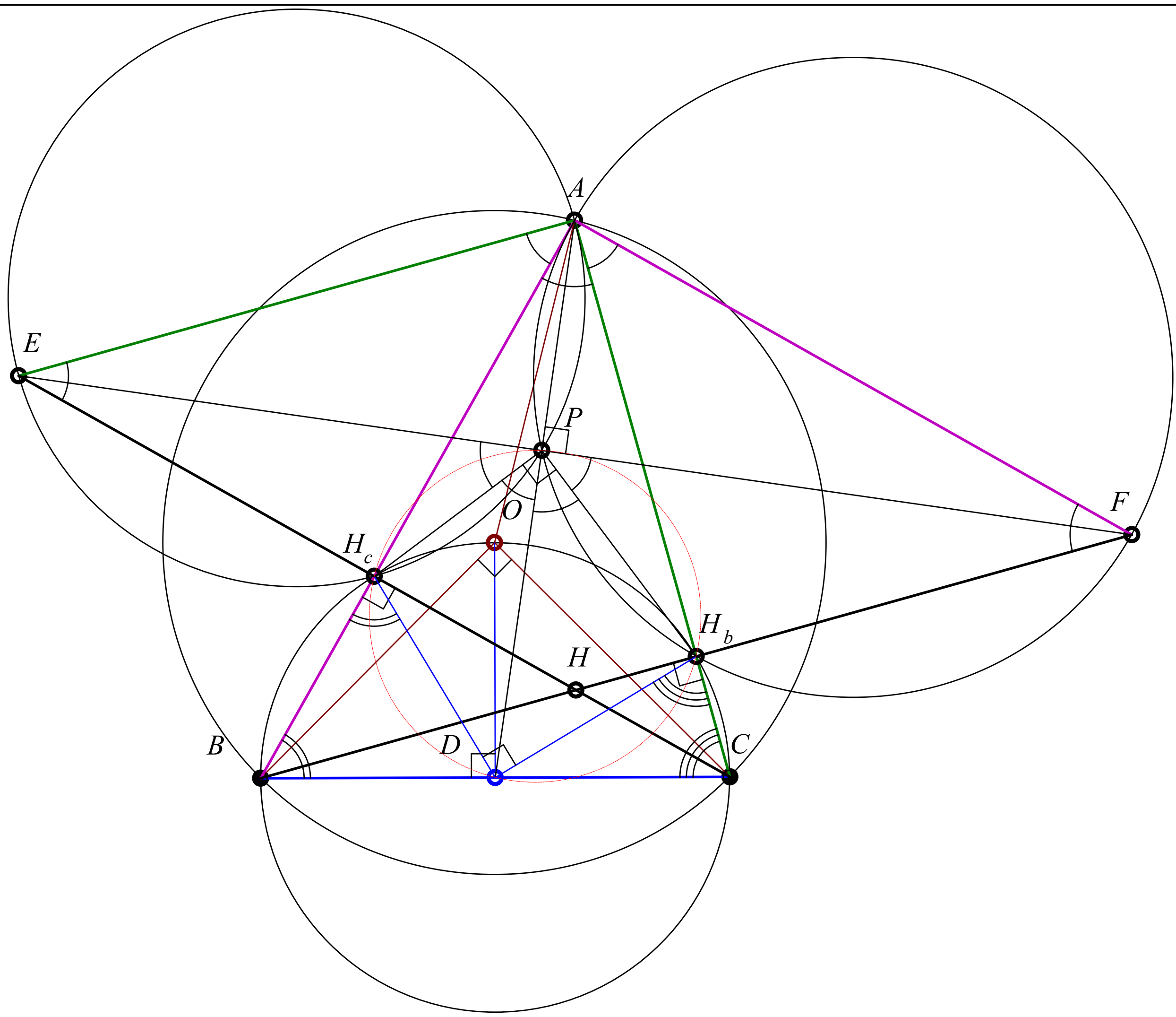

Fig.1.

SOLUȚIE: Notând cu $P := pr_{EF}(A)$, soluția problemei se reduce acum la a arăta doar că: $D \in (AP$. Dacă $O-$ este centrul cercului circumscris ΔABC; iar $\{H_b\} := [BF] \cap [AC]$ și $\{H_c\} := [CE] \cap [AB]$ (v.Fig.1), avem:

$$\left.\begin{array}{r} E := S_{AB}(C) \Rightarrow CE \perp AB \ (1) \\ P := pr_{EF}(A) \Leftrightarrow AP \perp EF \end{array}\right\} \Rightarrow AEH_bP - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{H_cPE}\right) = m\left(\widehat{H_cAE}\right) = 45^0. \quad (2)$$

În mod analog arătăm că: $APH_bF - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{H_cPF}\right) = m\left(\widehat{H_bAF}\right) = 45^0 \quad (3)$

și folosind apoi relațiile (2) și (3), obținem, că: $m\left(\widehat{H_bPH_c}\right) = 180^0 - \left[m\left(\widehat{H_cPE}\right) + m\left(\widehat{H_cPF}\right)\right] =$

$$= 180^0 - \left(45^0 + 45^0\right) = 90^0 \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{H_bPH_c}\right) = 90^0}. \quad (4)$$

Pe de altă parte, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} CE \perp AB \ (1) \\ [DB] \equiv [DC] \end{array}\right\} \Rightarrow [DH_c] \equiv [DB] \equiv [DC] \ (5) \Rightarrow m\left(\widehat{DH_cB}\right) = m\left(\widehat{H_cBD}\right) = B \\ \left.\begin{array}{r} F := S_{AC}(B) \Rightarrow BF \perp AC \\ [DB] \equiv [DC] \end{array}\right\} \Rightarrow [DH_b] \equiv [DB] \equiv [DC] \ (6) \Rightarrow m\left(\widehat{DH_bC}\right) = m\left(\widehat{DH_bC}\right) = C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\left(BDH_c\right) = 180^0 - \left[m\left(\widehat{DH_cB}\right) + m\left(\widehat{H_cBD}\right)\right] = 180^0 - 2 \cdot B \\ m\left(CDH_b\right) = 180^0 - \left[m\left(\widehat{DH_cB}\right) = m\left(\widehat{H_cBD}\right)\right] = 180^0 - 2 \cdot C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(BDH_c\right) + m\left(CDH_b\right) = 360^0 - 2 \cdot \left(B + C\right) = 2 \cdot \left[180^0 - \left(B + C\right)\right] = 2 \cdot A = 90^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{H_cDH_b}\right) = 180^0 - \left[m\left(BDH_c\right) + m\left(CDH_b\right)\right] = 180^0 - 90^0 = 90^0 \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{H_cDH_b}\right) = 90^0}. \quad (7)$$

În fine, din relațiile (4) și (7), rezultă că:

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{H_bPH_c}\right) + m\left(\widehat{H_cDH_b}\right) = 180^0 \Rightarrow PH_cDH_b - inscriptibil \\ [DH_c] \overset{(5);(6)}{\equiv} [DH_b] \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DH_c} \equiv \widehat{DH_b} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \Rightarrow m\left(\widehat{DPH_c}\right) = m\left(\widehat{DPH_b}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot m\left(\widehat{H_cDH_b}\right) \\ m\left(\widehat{H_cDH_b}\right) = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{DPH_c}\right) = 45^0 \\ \left.\begin{array}{r} AH_c \perp EH_c \\ m\left(\widehat{H_cAE}\right) = 45^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{AEH_c}\right) = 45^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DPH_c} \equiv \widehat{AEH_c} \quad (8)$$

și atunci faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} AEH_bP - inscriptibil \\ \widehat{DPH_c} \equiv \widehat{AEH_c} \ (8) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DPH_c} - \text{este un unghi exterior al patrulaterului inscriptibil } AEH_bP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D \in (AP}. \blacksquare$$

2) În cazul $m\left(\widehat{BAC}\right) < 45^0$, dacă $O-$ este centrul cercului circumscris ΔABC, atunci avem:

$$m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{BC}\right) = 2 \cdot m\left(\widehat{BAC}\right);$$

și dacă $D-$ este acum centrul cercului circumscris ΔOBC, atunci avem:

$$m\left(\widehat{BDC}\right) = 2 \cdot m\left(\widehat{BOC}\right) = 4 \cdot m\left(\widehat{BAC}\right) \text{ și } [DB] \equiv [DC] \text{ (ca raza în } \odot OBC\text{)}.$$

Aşa că, problema iniţială, ar putea fi reformulată astfel:

Fie $O-$centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC, $m\left(\widehat{BAC}\right)<45^0$; **iar $D-$centru cercului circumscris triunghiului** OBC. **Notăm apoi cu $E-$simetricul punctului** C, **faţă de dreapta** AB; **iar cu $F-$simetricul punctului** B, **faţă de dreapta** AC.

Demonstraţi că: $AD\perp EF$.

Mai mult, această reformulare este însă adevărată (după cum se poate vedea din Fig.2) şi în cazul în care: $m\left(\widehat{BAC}\right)>45^0$!!, adică avem următoarea generalizare:

Fie $O-$centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC **şi $D-$centru cercului circumscris triunghiului** OBC. **Notăm apoi cu $E-$simetricul punctului** C, **faţă de dreapta** AB; **iar cu $F-$simetricul punctului** B, **faţă de dreapta** AC.

Demonstraţi că: $AD\perp EF$.

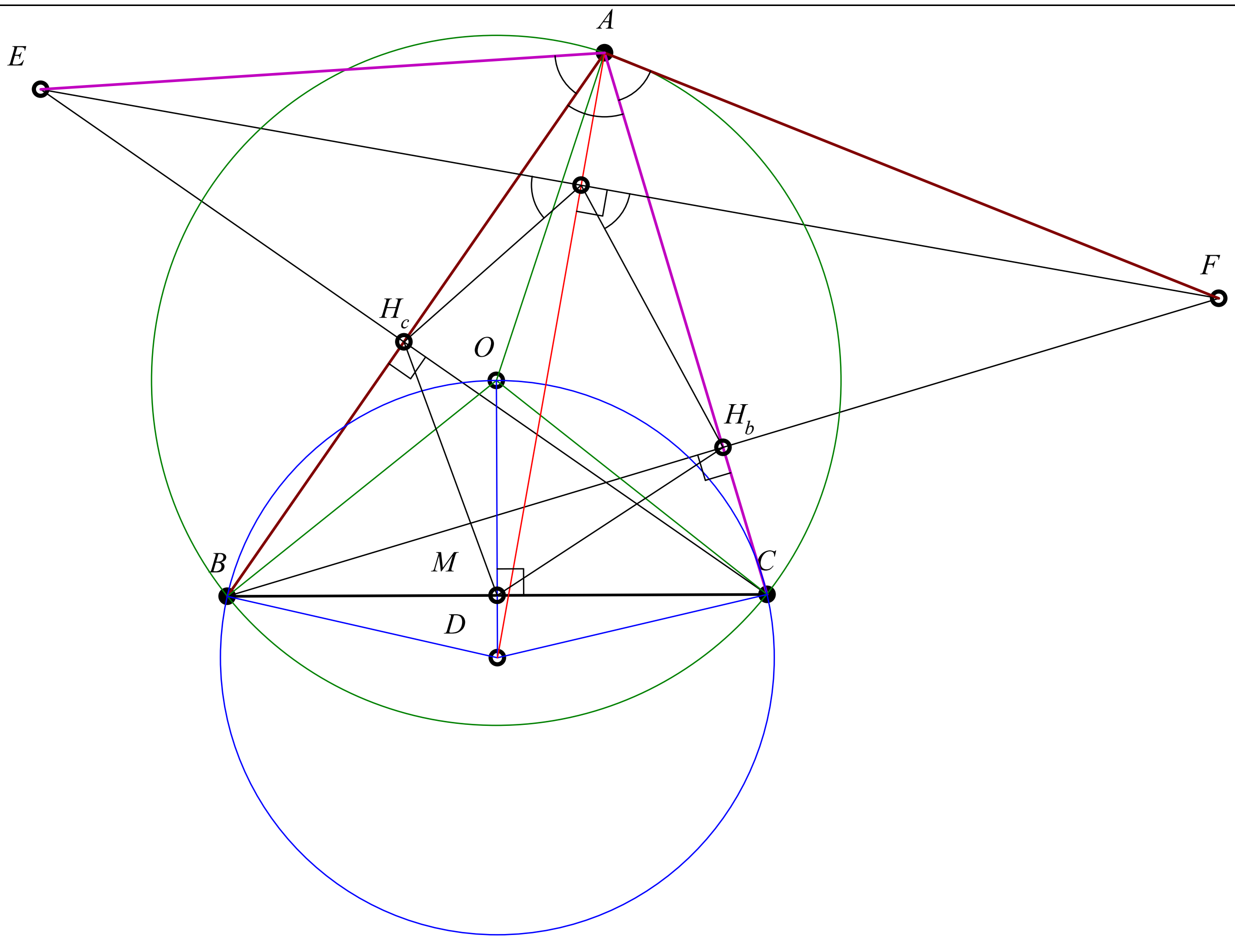

Fig.2.