OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI

Lista scurtă

2019

1. Numerele reale a și b satisfac egalitatea $a^3 + b^3 - 6ab = -11$. Demonstrați că $-\frac{7}{3} < a + b < -2$.

2. Fie numerele reale pozitive a, b, c, astfel încât $abc = \frac{2}{3}$. Demonstrați că:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

3. Fie A și B două submulțimi nevide ale mulțimii $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$, cu $A \cup B = X$. Fie P_A produsul elementelor mulțimii A și P_B produsul elementelor mulțimii B. Găsiți valoarea minimă posibilă și valoarea maximă posibilă ale sumei $P_A + P_B$ și toate cazurile posibile de egalitate.

4. Fie a, b două numere reale distincte și fie c un număr real pozitiv astfel încât

$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c.$$

Demonstrați că $-\sqrt{c} < ab < 0$.

5. Fie numerele reale pozitive a, b, c, d pentru care $abcd = 1$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3+b+c+d} + \frac{1}{a+b^3+c+d} + \frac{1}{a+b+c^3+d} + \frac{1}{a+b+c+d^3} \leq \frac{a+b+c+d}{4}.$$

6. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea:

$$(a^2+ac+c^2)\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c}\right) + b^2\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right) > a+b+c.$$

7. Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, cu $a+b+c = ab+bc+ca$, are loc inegalitatea:

$$3 + \sqrt[3]{\frac{a^3+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+1}{2}} \leq 2(a+b+c).$$

8. Fie S o mulțime ale cărei elemente sunt 100 de numere întregi pozitive și care are următoarea proprietate:

„*Printre oricare patru numere din mulțimea S, există un număr care divide fiecare dintre celelalte trei numere sau există un număr care este egal cu suma celorlalte trei numere*”.

Demonstrați că mulțimea S conține un număr care divide toate celelalte 99 de numere din S.

9. Într-un oraș oarecare există n drumuri drepte, astfel încât oricare două drumuri se intersectează și nu există trei drumuri care să treacă prin aceeași intersecție. Consiliul local dorește să organizeze orașul prin a desemna strada principală și strada secundară din fiecare intersecție. Demonstrați că acest lucru poate fi realizat în așa fel încât dacă cineva merge de-a lungul uneia dintre străzi, de la un capăt la celălalt, intersecțiile în care această stradă este principală și cele în care această stradă secundară vor apărea în ordine alternativă.

10. Un tablou 5×100 este împărțit în 500 de pătrate unitate, unde n dintre ele sunt colorate cu negru, iar restul sunt colorate cu alb. Două pătrate unitate se numesc *adiacente* dacă au o latură comună. Presupunem că oricare dintre pătratele unitate are cel mult două pătrate negre adiacente. Găsiți cea mai mare valoare pe care o poate avea n.

11. Avem un grup format din n copii. Pentru fiecare pereche de copii, cel puțin unul dintre ei trimite un mesaj celuilalt. Pentru fiecare copil A, dintre copiii cărora A le-a trimis un mesaj, exact 25% i-au trimis lui A un mesaj. Câte valori posibile de două cifre există pentru n?

12. Un economist și un statistician joacă un joc pe calculator care execută o singură operație. Calculatorul afieșază doar numere întregi pozitive și este folosit după cum urmează:

Notăm cu n un număr întreg care este afișat pe calculator. O persoană tastează un număr întreg m, ales din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 99\}$ și, dacă $m\%$ din numărul n este tot un număr întreg pozitiv, atunci calculatorul afișează $m\%$ din n. În caz contrar, calculatorul afișează un mesaj de eroare și operația nu este acceptată. Jocul constă în a efectua alternativ aceste operații , iar jucătorul care nu reușește să facă o astfel de operație pierde. Câte numere din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 99\}$ garantează o strategie câștigătoare pentru statistician, știind că economistul începe jocul?

De exemplu, în cazul în care calculatorul afișează 1200, economistul poate tasta 50, obținându-se pe calculator numărul 600. Apoi, statisticianul poate să tasteze 25 și pe calculator apare numărul 150. Acum, de exemplu, economistul nu poate să tasteze 75, deoarece 75% din 150 nu este un număr întreg pozitiv, dar poate să aleagă să tasteze 40, iar jocul poate să continue până ce unul dintre cei doi nu mai poate tasta niciun număr din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 99\}$.

13. Fie ABC un triunghi cu $\hat{A} = 90°$ și $\hat{B} = 30°$. Perpendiculara în mijlocul M al laturii BC întâlnește bisectoarea BK a unghiului $\hat{B}$ în punctul E. Mediatoarea segmentului EK intersectează pe AB în D. Demonstrați că $DK \perp DE$.

14. Fie ABC un triunghi și fie ω cercul său circumscris. Fie ℓ_B și ℓ_C două drepte paralele care trec prin punctele B, respectiv C. Dreptele ℓ_B și ℓ_C intersectează cercul ω pentru a doua oară în punctele D, respectiv E (punctul D aparține arcului AB și punctul E aparține arcului AC). Presupunem că DA intersectează ℓ_C în F și dreapta EA intersectează dreapata ℓ_B în G. Dacă O, O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ADG, respectiv AEF, iar P este centrul cercului circumscris triunghiului OO_1O_2, demonstrați că OP este paralelă cu ℓ_B și ℓ_C.

15. Fie triunghiul ABC și I centrul cercului înscris în acest triunghi. Punctele D și E sunt situate pe segmentele CA, respectiv BC, astfel încât $CD = CE$. Fie F un punct situat pe segmentul CD. Demonstrați că patrulaterul $ABEF$ este circumscriptibil dacă și numai dacă patrulaterul $DIEF$ este inscriptibil.

16. Fie triunghiul ABC, cu $AB < AC$. Mediatoarea laturii BC intersectează dreptele AB și AC în punctele P, respectiv Q. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar punctele M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv PQ. Demonstrați că dreptele HM și AN se intersectează într-un punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC.

17. Fie P un punct situat în interiorul triunghiului ABC. Dreptele AP, BP și CP intersectează din nou cercurile circumscrise triunghiurilor PBC, PCA și PAB în punctele D, E și respectiv F. Demonstrați că punctul P este ortocentrul triunghiului DEF dacă și numai dacă punctul P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

18. Fie ABC un triunghi neisoscel și I centrul cercului său înscris. Fie D un punct situat pe segmentul BC astfel încât cercul circumscris triunghiului BID să intersecteze segmentul AB în $E \neq B$, iar cercul circumscris triunghiului CID să intersecteze segmentul AC în $F \neq C$. Cercul circumscris triunghiului DEF intersectează AB și AC a doua oară în punctele M, respectiv N. Notăm cu P și Q punctele de intersecție a dreptelor IB și DE, respectiv IC și DF. Demonstrați că dreptele EN, FM și PQ sunt paralele.

19. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\hat{A} = 90°$. Fie K mijlocul laturii BC și fie $AKLM$ un paralelogram de centru C. Notăm cu T punctul de intersecție a dreptei AC cu mediatoarea segmentului BM. Fie ω_1 cercul de centru C și rază CA, iar ω_2 cercul de centru T și rază TB. Demonstrați că unul dintre punctele de intersecție ale cercurilor ω_1 și ω_2 este situat pe dreapta LM.

20. Determinați toate numerele prime p pentru care există numerele întregi pozitive x, y, z astfel încât numărul

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z$$

să se scrie ca produsul a exact 3 numere prime distincte.

21. Găsiți toate tripletele (p, q, r) de numere prime pentru care numerele $\dfrac{p^2+2q}{q+r}$, $\dfrac{q^2+9r}{r+p}$ și $\dfrac{r^2+3p}{p+q}$ sunt întregi.

22. Găsiți toate numerele prime p și toate numerele întregi nenegative $x \neq y$ pentru care $x^4 - y^4 = p(x^3 - y^3)$.

23. Găsiți toate numerele întregi x, y pentru care $x^3(y+1) + y^3(x+1) = 19$.

24. Găsiți toate numerele întregi pozitive x, y, z pentru care $45^x - 6^y = 2019^z$.

25. Găsiți toate tripletele (a, b, c) de numere întregi nenegative care satisfac egalitatea $a! + 5^b = 7^c$.

26. Găsiți toate numerele pătrate perfecte n pentru care, dacă numărul întreg $a \geq 15$ este un divizor al lui n, atunci $a + 15$ este o putere a unui număr prim.