Propunere rezolvare pentru Problema săptămânii 210

August 23, 2020

a) Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Demonstrați că:

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(a+1)}{1+ca+a} + \frac{(c-1)(b+1)}{1+ab+b} \leq 0.$$

Fie

$$I = \frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(a+1)}{1+ca+a} + \frac{(c-1)(b+1)}{1+ab+b} = \sum_{cyc} \frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c}$$

Pentru a demonstra această inegalitate, metoda evidentă ar fi să aducem I sub forma unei fractii cu un anumit numitor, și apoi să obținem o simplificare, ca apoi să aplicăm inegalitatea mediilor $m_g \leq m_a$. Putem observa că putem exprima cei trei termenii ale inegalității noastre sub forma unei fractii cu numitorul comun $ab + b + 1$. Pentru primul termen, știind că $abc = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{ab}$:

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} = \frac{(a-1)(\frac{1}{ab}+1)}{1+b\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}} = \frac{\frac{(a-1)(ab+1)}{ab}}{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}} = \frac{(a-1)(ab+1)}{ab(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{ab})} = \frac{(a-1)(ab+1)}{ab+b+1}$$

Se poate vedea că noul nostru numitor este egal cu cel al termenului al treilea. Astfel, ar fi logic ca noi să aducem și al doilea termen la numitorul $ab + b + 1$. Avem

$$\frac{(b-1)(a+1)}{1+ca+a} = \frac{(b-1)(a+1)}{1+\frac{1}{ab}a+a} = \frac{(b-1)(a+1)}{1+\frac{1}{b}+a} = \frac{(b-1)(a+1)b}{b(1+\frac{1}{b}+a)} = \frac{(b-1)(ab+b)}{b+1+ab} = \frac{(b-1)(ab+b)}{ab+b+1}$$

Acum vom aduna toți termenii noștri,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(a-1)(ab+1)}{ab+b+1} + \frac{(b-1)(ab+b)}{ab+b+1} + \frac{(c-1)(b+1)}{1+ab+b} \\ &= \frac{(a-1)(ab+1)+(b-1)(ab+b)+(c-1)(b+1)}{ab+b+1} \end{aligned}$$

Atunci

$$I = \frac{a^2b + a - ab - 1 + ab^2 + b^2 - ab - b + bc + c - b - 1}{ab+b+1}$$

Deci

$$I = \frac{a^2b + ab^2 - 2(ab+b+1) + b^2 + bc + a + c}{ab+b+1}$$

Acum trebuie să demonstrăm că

$$\frac{a^2b + ab^2 - 2(ab+b+1) + b^2 + bc + a + c}{ab+b+1} \geq 0$$

Deoarece a, b, c sunt numere pozitive reale, $ab+b+1 \in \mathbb{R}_+^*$, deci acum trebuie doar să demonstrăm că

$$a^2b + ab^2 - 2(ab+b+1) + b^2 + bc + a + c \geq 0$$
$$a^2b + ab^2 + b^2 + bc + a + c \geq 2(ab+b+1)$$

Studiind această expresie, vom folosi inegalitatea mediilor, adică;

$$ab^2 + a \geq 2ab$$

$$b^2 + 1 \geq 2b$$

si

$$ab^2 + bc + c \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3$$

Dacă adunăm aceste inegalități

$$ab^2 + bc + c + b^2 + 1 + ab^2 + a \geq 2ab + 2b + 3$$

$$ab^2 + ab^2 + b^2 + bc + a + c \geq 2(ab+b+1)$$

ceea ce este exact inegalitatea care trebuia să fie demonstrată. Astfel, demonstrația este terminată.
b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive astfel încât $abcd = 1$. Demonstrați că

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d} + \frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a} + \frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b} \geq 0.$$

Aici, o idee mai eficientă ar fi să facem seria de substituții (deoarece $abcd = 1$)

$$a = \frac{x}{y} \qquad b = \frac{y}{z} \qquad c = \frac{z}{t} \qquad d = \frac{t}{x}$$

Atunci inegalitatea noastră devine

$$\frac{(\frac{x}{y}-1)(\frac{z}{t}+1)}{1+\frac{y}{z}\frac{z}{t}+\frac{z}{t}} + \frac{(\frac{y}{z}-1)(\frac{t}{x}+1)}{1+\frac{z}{t}\frac{t}{x}+\frac{t}{x}} + \frac{(\frac{z}{t}-1)(\frac{x}{y}+1)}{1+\frac{t}{x}\frac{x}{y}+\frac{x}{y}} + \frac{(\frac{t}{x}-1)(\frac{y}{z}+1)}{1+\frac{x}{y}\frac{y}{z}+\frac{y}{z}} \geq 0$$

$$\frac{\frac{x-y}{y}\frac{z+t}{t}}{1+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}} + \frac{\frac{y-z}{z}\frac{t+x}{x}}{1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x}} + \frac{\frac{z-t}{t}\frac{x+y}{y}}{1+\frac{t}{y}+\frac{x}{y}} + \frac{\frac{t-x}{x}\frac{y+z}{z}}{1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}} \geq 0$$

$$\frac{(x-y)(z+t)}{yt(1+\frac{y}{t}+\frac{z}{t})} + \frac{(y-z)(t+x)}{zx(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})} + \frac{(z-t)(x+y)}{ty(1+\frac{t}{y}+\frac{x}{y})} + \frac{(t-x)(y+z)}{xz(1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z})} \geq 0$$

$$\frac{(x-y)(z+t)}{yt+yt\frac{y}{t}+yt\frac{z}{t}} + \frac{(y-z)(t+x)}{zx+zx\frac{z}{x}+zx\frac{t}{x}} + \frac{(z-t)(x+y)}{ty+ty\frac{t}{y}+ty\frac{x}{y}} + \frac{(t-x)(y+z)}{xz+xz\frac{x}{z}+xz\frac{y}{z}} \geq 0$$

$$\frac{(x-y)(z+t)}{yt+y^2+yz} + \frac{(y-z)(t+x)}{zx+z^2+zt} + \frac{(z-t)(x+y)}{ty+t^2+tx} + \frac{(t-x)(y+z)}{xz+x^2+xy} \geq 0$$

$$\frac{(x-y)(z+t)}{y(t+y+z)} + \frac{(y-z)(t+x)}{z(x+z+t)} + \frac{(z-t)(x+y)}{t(y+t+x)} + \frac{(t-x)(y+z)}{x(z+x+y)} \geq 0$$

Vom aduna 4 pe ambele părți (această operație are următorul motiv - noi dorim numai termeni pozitivi. Când deschidem parantezele, spre exemplu, vom avea la primul termen $xz + xt - yz - yt$.

Dacă am aduna numitorul, am obține numai o sumă pozitivă. Adunăm 1 pentru fiecare termen pentru a elimina scăderea):

$$\frac{(x-y)(z+t)}{y(t+y+z)}+1+\frac{(y-z)(t+x)}{z(x+z+t)}+1+\frac{(z-t)(x+y)}{t(y+t+x)}+1+\frac{(t-x)(y+z)}{x(z+x+y)}+1\geq 4$$

$$\frac{xz+xt-yz-yt+yt+y^2+yz}{y(t+y+z)}+\frac{yt+yx-zt-xz+xz+z^2+tz}{z(x+z+t)}+\frac{zx+zy-tx-ty+ty+t^2+tx}{t(y+t+x)}+$$

$$\frac{ty+tz-xy-xz+xz+x^2+xy}{x(z+x+y)}\geq 4$$

Deci

$$\frac{xz+xt+y^2}{y(t+y+z)}+\frac{yt+yx+z^2}{z(x+z+t)}+\frac{zx+zy+t^2}{t(y+t+x)}+\frac{ty+tz+x^2}{x(z+x+y)}\geq 4$$

Aici, folosirea inegalității Cauchy-Schwarz este perfectă. Avem

$$(y^2+xz+xt)(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})\geq (y+z+t)^2$$

Înmulțim ambele părți cu

$$\frac{1}{(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})y(y+z+t)}$$

pentru a obține

$$\frac{(y^2+xz+xt)(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})}{(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})y(y+z+t)}\geq\frac{(y+z+t)^2}{(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})y(y+z+t)}$$

$$\frac{(y^2+xz+xt)}{y(y+z+t)}\geq\frac{(y+z+t)}{(1+\frac{z}{x}+\frac{t}{x})y}$$

$$\frac{(y^2+xz+xt)}{y(y+z+t)}\geq\frac{(y+z+t)}{\frac{(x+z+t)y}{x}}=\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}$$

Analog, avem

$$\frac{z^2+yt+xy}{z(x+z+t)}\geq\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}\qquad\frac{t^2+zx+yz}{t(x+y+t)}\geq\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}\qquad\frac{x^2+ty+tz}{x(x+y+z)}\geq\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)}$$

Deci

$$\frac{xz+xt+y^2}{y(t+y+z)}+\frac{yt+yx+z^2}{z(x+z+t)}+\frac{zx+zy+t^2}{t(y+t+x)}+\frac{ty+tz+x^2}{x(z+x+y)}\geq\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}+\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}+$$

$$+\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)}$$

Drept urmare, dacă am demonstra că

$$\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}+\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}+\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)}\geq 4$$

am obține egalitatea cerută. Aici, putem folosi inegalitatea mediilor:

$$\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}+\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}+\frac{x(z+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)}}$$

$$\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}+\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}+\frac{x(z+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)} \geq 4\sqrt[4]{1}$$

$$\frac{x(y+z+t)}{y(x+z+t)}+\frac{y(x+z+t)}{z(x+y+t)}+\frac{x(z+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(x+y+z)}{x(y+z+t)} \geq 4$$

De aici, obținem că

$$\frac{xz+xt+y^2}{y(t+y+z)}+\frac{yt+yx+z^2}{z(x+z+t)}+\frac{zx+zy+t^2}{t(y+t+x)}+\frac{ty+tz+x^2}{x(z+x+y)} \geq 4$$

și astfel, mergând invers, obținem inegalitatea cerută.