Problema săptămânii 209

Fie ABC un triunghi în care $m(\measuredangle ACB) = 90°$. Tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC intersectează dreapta AB în D. Fie E mijlocul lui $[CD]$ și fie F acel punct de pe dreapta EB pentru care AF este paralelă cu CD. Demonstrați că dreptele AB și CF sunt perpendiculare.

Soluție:

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cum $m(\measuredangle ACB) = 90°$ rezultă că $[AB]$ este un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC. Astfel O este mijlocul lui $[AB]$.

În continuare vom analiza cazul în care $A \in (DB)$ și cazul în care $B \in (DA)$.

1) Dacă $A \in (DB)$ atunci considerăm M mijlocul lui $[AF]$.

Avem $AM \parallel DE$ de unde rezultă că $\measuredangle MAO \equiv \measuredangle EDB$ (corespondente).

De asemenea $[MO]$ este linie mijlocie în triunghiul AFB rezultă $MO \parallel EB$ de unde reiese că $\measuredangle MOA \equiv \measuredangle EBD$ (corespondente).

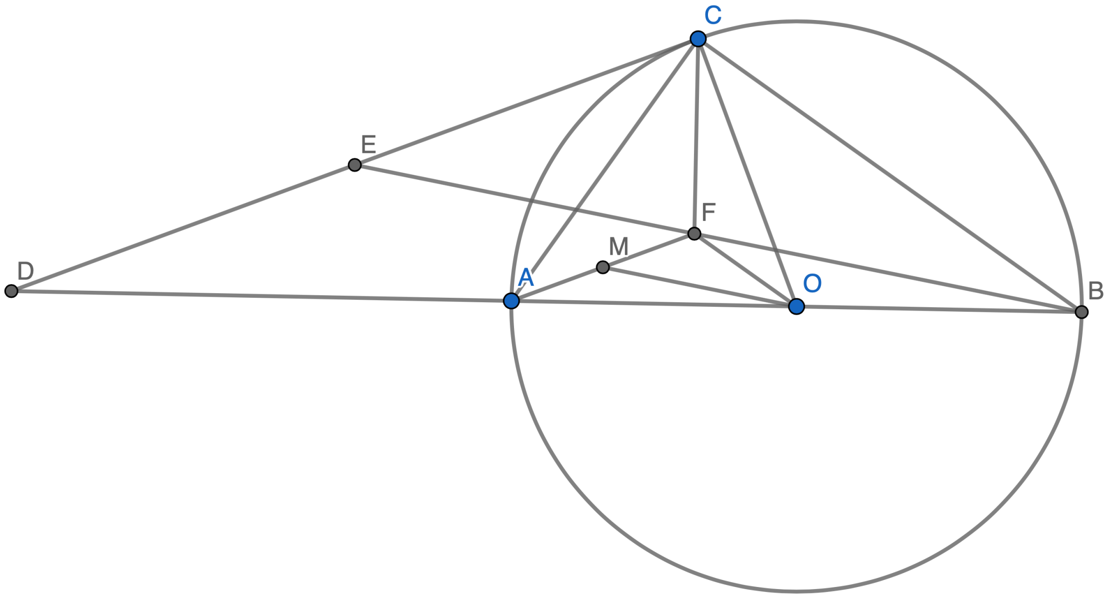
Cum $\measuredangle MAO \equiv \measuredangle EDB$ și $\measuredangle MOA \equiv \measuredangle EBD$ rezultă că triunghiurile MAO și EDB sunt asemenea. Astfel $\dfrac{MA}{ED} = \dfrac{AO}{DB}$ însă cum $MA = \dfrac{AF}{2}$ și $ED = \dfrac{CD}{2}$ rezultă că $\dfrac{AF}{CD} = \dfrac{AO}{DB}$.

Avem $\measuredangle FAO \equiv \measuredangle CDB$ și $\dfrac{AF}{CD} = \dfrac{AO}{DB}$, prin urmare triunghiurile FAO și CDB sunt asemenea $(L.U.L)$. Atunci avem $\measuredangle FOA \equiv \measuredangle CBD$ de unde rezultă că $OF \parallel BC$, deoarece $\measuredangle FOA$ și $\measuredangle CBD$ sunt corespondente.

Cum $OF \parallel BC$ și $BC \perp AC$ rezultă că $OF \perp AC$.

$[CD]$ este tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC deci $CO \perp CD$ dar din ipoteză $CD \parallel AF$ si astfel $AF \perp CO$.

În triunghiul ACO înălțimile AF și OF se intersectează în F rezultă că F este ortocentrul triunghiului ACO de unde rezultă că CF este înălțime în triunghiul ACO sau cu alte cuvinte $CF \perp AB$.



2) Dacă $B \in (DA)$ atunci considerăm N mijlocul lui $[BC]$.

Avem $ED \parallel AF$ de unde rezultă că $\frac{EB}{BF} = \frac{DB}{BA}$ (am obținut acest rezultat din teorema fundamentală a asemănării).

$[EN]$ este linie mijlocie în triunghiul BCD, prin urmare $EN \parallel DB$ și $EN = \frac{DB}{2}$,adică $DB = 2EN$. În plus $BA = 2BO$ de unde obținem că $\frac{DB}{BA} = \frac{2EN}{2BO} = \frac{EN}{BO} = \frac{EB}{BF}$. Totodată din $EN \parallel DB$ obținem că $\measuredangle FBO \equiv \measuredangle BEN$.

Din $\measuredangle FBO \equiv \measuredangle BEN$ și $\dfrac{EN}{BO} = \dfrac{EB}{BF}$ rezultă că $\triangle BEN \sim \triangle FBO$ $(L.U.L)$. De aici deducem că $\measuredangle BFO \equiv \measuredangle EBN$. Unghiurile $\measuredangle BFO$ și $\measuredangle EBN$ sunt corespondente rezultă $FO \parallel BC$,dar $BC \perp AC$ rezultă că $FO \perp AC$. De asemenea $CO \perp CD$ și $CD \parallel AF$ rezultă $CO \perp AF$.

În triunghiul ACF înălțimile FO și CO se intersectează în O , deci O este ortocentrul triunghiului ACF. Obținem că și AO este înălțime în triunghiul ACF sau cu alte cuvinte $CF \perp AB$.