Problema săptămânii 211

Ana şi Bogdan joacă următorul joc, plecând de la un număr natural dat, a, cunoscut de amândoi. Ana alege un număr natural nenul b și i-l spune lui Bogdan. Acesta, la rândul său, alege un număr natural nenul c. Se calculează apoi numărul $N = a+bc$. Dacă N e pătrat perfect, câştigă Bogdan. Dacă nu, câştigă Ana. Cine are strategia câştigătoare?

Bogdan Enescu

Soluţie: Dacă a este pătrat perfect, câştigă Bogdan. Dacă a nu este pătrat perfect, câştigă Ana.
• Dacă a este pătrat perfect, $a = n^2$, Bogdan poate alege numărul c astfel încât $a + bc = (n + b)^2$. El alege $c = 2n + b$ şi atunci $a + bc = n^2 + b(2n + b) = (n + b)^2$.
• Dacă a nu este pătrat perfect, atunci Ana poate alege $b = a^2$. Indiferent ce număr c ar alege Bogdan, numărul $a + bc = a + a^2c = a(1 + ac)$ nu este pătrat perfect. Într-adevăr, dacă $a(1 + ac)$ ar fi pătrat perfect, deoarece a şi $1 + ac$ sunt relativ prime, ar rezulta că ambii factori ar fi pătrate perfecte, ori a nu este pătrat perfect.

Remarcă: Cu o altă formulare, problema a fost dată la ONM 1997 (clasa a VII-a).

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Ana Duguleanu* şi *Radu Şerban.*

Problem of the week no. 211

Ann and Bob play the following game, starting from a given positive integer a, known to both of them. Ann chooses a positive integer b and tells it to Bob. On his turn, Bob chooses a positive integer c. Then, the number $N = a + bc$ is computed. If N is a perfect square, Bob wins. Otherwise, Ann wins. Which of the two players has a winning strategy?

Bogdan Enescu

Solution: If a is a perfect square, Bob wins. If a is not a perfect square, Ann wins.
• If a is a perfect square, say $a = n^2$, Bob can choose the number c such that $a+bc = (n+b)^2$. Indeed, taking $c = 2n+b$ makes $a+bc = n^2+b(2n+b) = (n+b)^2$, a perfect square.
• If a is not a perfect square, Ann can choose $b = a^2$. Regardless of Bob's choice of c, the number $a+bc = a+a^2c = a(1+ac)$ is not perfect square. Indeed, assume $a(1 + ac)$ to be a perfect square. As a and $1 + ac$ are co-prime, both factors must be perfect squares, but a is not a perfect square. Thus, $a + bc$ is not a perfect square; Ann wins.