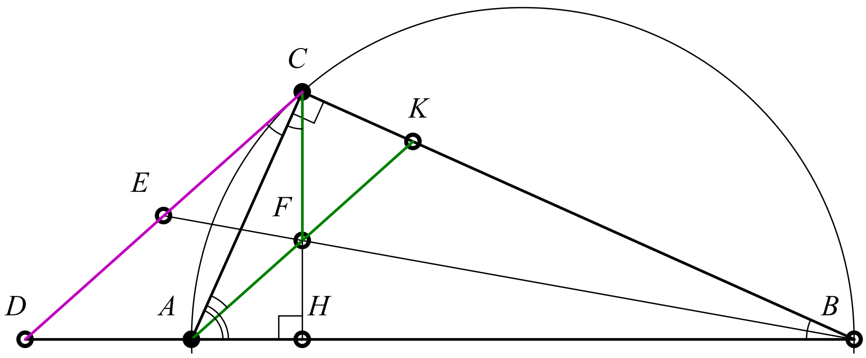
Problema săptămânii 209
Fie ABC un triunghi în care $m(\sphericalangle ACB) = 90°$. Tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC intersectează dreapta AB în D. Fie E mijlocul lui $[CD]$ şi fie F acel punct de pe dreapta EB pentru care AF este paralelă cu CD.
Demonstraţi că dreptele AB şi CF sunt perpendiculare.

Olimpiadă Australia, 2020

Soluţie:
Sunt două configuraţii: dacă $CA < CB$, atunci $A \in (BD)$ (vezi figura de mai jos), iar dacă $CA > CB$, atunci $B \in (AD)$ (vezi figura de pe pagina 2). Cazul $CA = CB$ nu este posibil. Cele două cazuri se tratează similar, dar parcă ideea vine mai uşor în primul caz:



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $\{H\} := CF \cap [AB]$ şi cu $\{K\} := AF \cap [BC]$ (v.Fig.), avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} AK \parallel CD \\ [EC] \equiv [ED] \\ BE \cap [AK] = \{F\} \end{array}\right\} \Rightarrow [FK] \equiv [FA] \\ AC \perp CK \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{[FC]} \equiv [FK] \equiv \underline{[FA]} \Rightarrow \widehat{CAF} \equiv \widehat{FCA}. \quad (1)$$

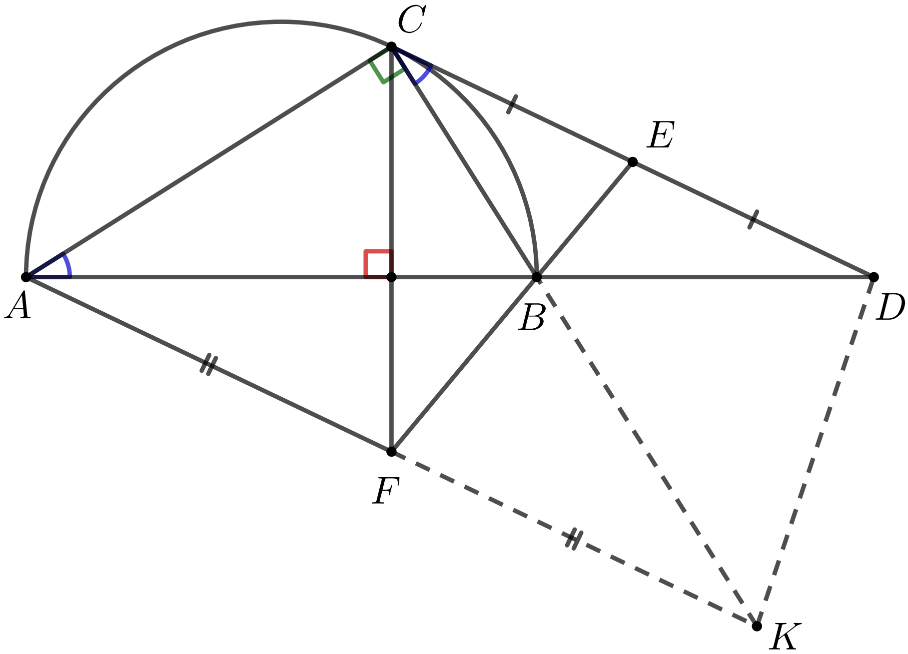
Pe de altă parte, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} AF \parallel CD(ip) \Rightarrow \widehat{CAF} \equiv \widehat{ACD} \\ CD \cap \odot ABC = \{C\} \Rightarrow \widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\widehat{CAF}} \equiv \widehat{ABC} \\ \underline{\widehat{CAF}} \equiv \widehat{FCA}\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{FCA}. \quad (2)$$

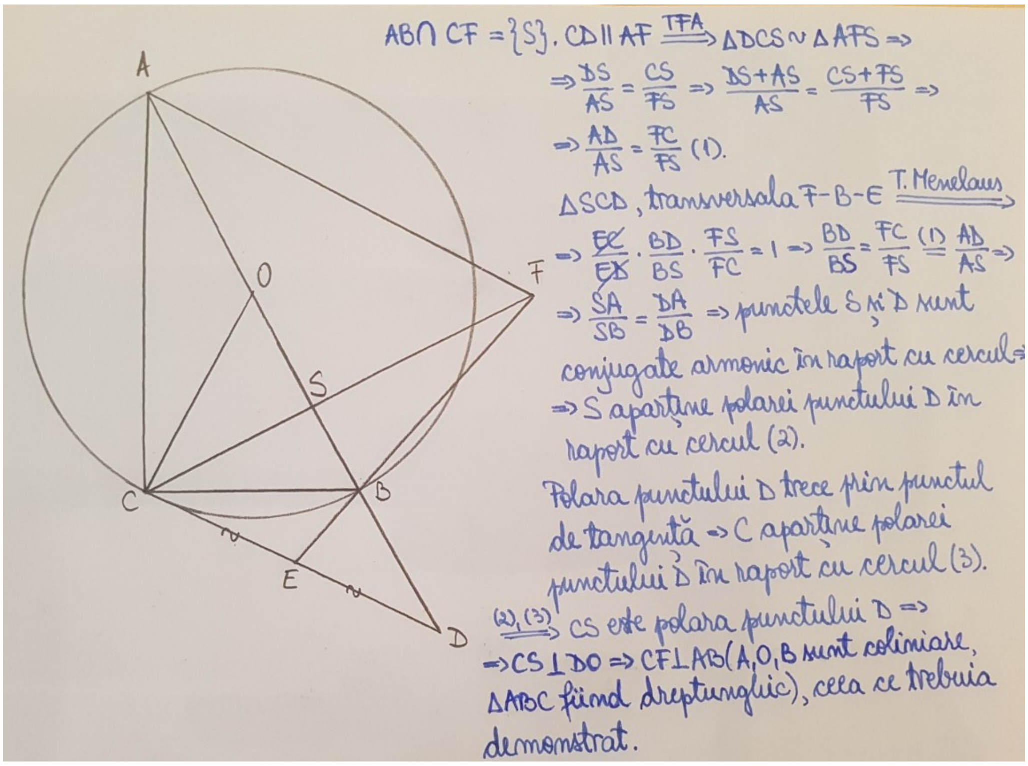
În fine, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{HCA} \equiv \widehat{ABC}\ (2) \\ \widehat{CAH} = \widehat{CAB} \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{AHC}\right) = m\left(\widehat{ACB}\right) = 90^0 \Rightarrow m\left(\widehat{AHC}\right) = 90^0 \Rightarrow \boxed{AB \perp CF}. \blacksquare$$

Ştim că într-un trapez, mijloacele bazelor, punctul de intersecţie a diagonalelor şi punctul de intersecţie a prelungirilor laturilor neparalelele sunt coliniare. Practic asta am folosit mai sus pentru trapezul $DCKA$. La cazul al doilea procedăm la fel: fie $\{K\} = BC \cap AF$ şi folosim proprietatea de mai sus pentru trapezul $DCAK$ (doar că B este acum intersecţia diagonalelor). $[CF]$ este din nou mediană în triunghiul dreptunghic CAK, deci $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle DCK) = m(\sphericalangle CKF) = m(\sphericalangle BCF) = 90° - m(\sphericalangle ACF)$, de unde rezultă $CF \perp AB$.



O soluţie interesantă, care funcţionează fără modificări şi în cazul $A \in (DB)$, am primit de la *Ana Duguleanu*:



$AB \cap CF = \{S\}$. $CD \parallel AF \xrightarrow{TFA} \Delta DCS \sim \Delta AFS \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DS}{AS} = \frac{CS}{FS} \Rightarrow \frac{DS+AS}{AS} = \frac{CS+FS}{FS} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AS} = \frac{FC}{FS}$ (1).

ΔSCD, transversala F-B-E $\xrightarrow{\text{T. Menelaus}}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{EC}}{\cancel{ED}} \cdot \frac{BD}{BS} \cdot \frac{FS}{FC} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{BS} = \frac{FC}{FS} \overset{(1)}{=} \frac{AD}{AS} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow$ punctele S și D sunt conjugate armonic în raport cu cercul $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S aparține polarei punctului D în raport cu cercul (2).

Polara punctului D trece prin punctul de tangență $\Rightarrow$ C aparține polarei punctului D în raport cu cercul (3).

$\xrightarrow{(2),(3)}$ CS este polara punctului D $\Rightarrow$

$\Rightarrow CS \perp DO \Rightarrow CF \perp AB$ (A, O, B sunt coliniare, ΔABC fiind dreptunghic), ceea ce trebuia demonstrat.

Într-un fişier separat, găsiţi soluţia lui *Radu Şerban* care arată, în ambele cazuri, că $FO \parallel BC$ şi deduce că F este ortocentrul triunghiului CAO. (Am notat cu O centrul cercului.)

Faptul că F este ortocentrul triunghiului ACO rezultă mai ușor. Din prima relație a soluției lui *Mihai Miculița* avem $AF = FC$. Cum $AO = OC$, deducem că OF este mediatoarea segmentului AC, deci înălțime. Cum $AF \parallel DC$, AF este înălțime.

Pe site-ul competiţiei problema are nu mai puţin de 10 soluţii. (vezi problema 3)

Am mai primit soluţii de la: *Andrei Pană, David Ghibu* şi *Tashi Diaconescu.*

Problem of the week no. 209

Let ABC be a triangle with $\sphericalangle ACB = 90°$. Suppose that the tangent line at C to the circle passing through A, B, C intersects the line AB at D. Let E be the midpoint of CD and let F be the point on the line EB such that AF is parallel to CD. Prove that the lines AB and CF are perpendicular.

Austalian Olympiad, 2020

There are two cases to be treated: $CA < CB$ and $CA > CB$. ($CA = CB$ is not possible.) The two cases are similar. (See the two figures one pages 1 and 2.)
In both cases, one could consider $\{K\} = AF \cap CB$ and apply the following well known fact to the trapezoid $DCAK$ (or $DCKA$):
In a trapezoid, the midpoints of the two bases, the intersection point of the diagonals and the intersection point of the lines that contain the non-parallel opposite sides are collinear.

The website of the competition offers no less than 10 solutions. (see problem 3)