Problema săptămânii 208

Amy şi Bec joacă următorul joc. Jocul începe cu trei grămezi cu câte 2020 de pietre. Jucătorii mută alternativ; Amy mută prima. O mutare constă din a alege una din grămezile disponibile, a scoate din joc grămezile care nu au fost alese şi a împărţi grămada aleasă în două sau trei grămezi nevide. Pierde jucătorul care nu mai poate muta. Demonstraţi că Bec poate întotdeauna câştiga, indiferent de modul în care joacă Amy.

Olimpiadă Australia, 2020

Soluţie: (*Tashi Diaconescu*)
Numim *grămadă pierzătoare* o grămadă în care numărul de pietre este de forma $3k+1$ şi *grămadă câştigătoare* o grămadă în care numărul de pietre este de forma $3k$ sau $3k+2$.
Deoarece 2020 este un număr de forma $3k+1$, el nu se scrie nici ca suma a două numere de forma $3k+1$, nici ca suma a trei numere de forma $3k+1$. Deducem că Amy va lasă, după prima ei mutare, cel puţin o grămadă câştigătoare. Bec va alege o asemenea grămadă. Dacă ea conţine $3k+3$ pietre, Bec lasă două grămezi cu câte o piatră şi una cu $3k+1$ pietre. Dacă grămada câştigătoare aleasă de Bec conţine $3k+2$ pietre, Bec lasă o grămadă cu o piatră şi una cu $3k+1$ pietre. În ambele cazuri, Bec va lăsa numai grămezi pierzătoare.
Astfel, după mutarea lui Bec, Amy are din nou numai grămezi pierzătoare. Ea va alege una şi o va împărţi în două sau trei grămezi dintre care cel puţin una câştigătoare. Din nou, Bec va alege o grămadă câştigătoare şi o va împărţi în grămezi pierzătoare. Continuând astfel, după mutarea lui Bec vor exista numai grămezi pierzătoare, iar după cea a lui Amy, Bec va avea întotdeauna o mutare. Cum numărul total de pietre scade mereu, jocul se va termina. Acel cineva care nu are mutare, care urmează la mutare având în faţă numai grămezi cu o piatră (grămezi pierzătoare), nu poate fi decât Amy. Prin urmare Amy pierde, adică Bec câştigă.

Remarcă: (*Tashi Diaconescu*)
De fapt, poziţiile pierzătoare din analiza retrogradă sunt tocmai cele în care toate grămezile sunt pierzătoare, iar poziţiile câştigătoare sunt cele în care cel puţin o grămadă este câştigătoare.

Am mai primit soluţii de la: *Radu Şerban, David Ghibu* şi *Carol Luca Gasan.*

Problem of the week no. 208

Amy and Bec play the following game. Initially, there are three piles, each containing 2020 stones. The players take turns to make a move, with Amy going first. Each move consists of choosing one of the piles available, removing the unchosen pile(s) from the game, and then dividing the chosen pile into 2 or 3 non-empty piles. A player loses the game if they are unable to make a move. Prove that Bec can always win the game, no matter how Amy plays.

Austalian Olympiad, 2020

A solution by *Angelo di Pasquale* can be found here.