Problema săptămânii 207

Pe tablă sunt scrise numerele 1!, 2!, 3!, …, 2017!. Care este numărul minim de numere care trebuie şterse de pe tablă astfel încât produsul numerelor rămase să fie pătrat perfect?

Olimpiadă Bulgaria, 2017

Soluţie: Răspunsul este 2.

Observăm că 2017 este număr prim şi că el apare (la puterea 1) numai în descompunerea în factori primi a lui 2017!. Astfel, dacă nu îl ştergem pe 2017! nu vom obţine pătrat perfect. Ştergând 2017!, produsul numerelor rămase pe tablă nu este pătrat perfect. Într-adevăr, numărul prim 997 va apărea la putea 1 în descompunerile în factori primi ale numerelor 997!, 998!, …, 1993! şi la puterea a doua în descompunerile numerelor 1994!, 1995!, …, 2016!. Aşadar, în descompunerea în factori primi a produsului $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2016!$, factorul prim 997 apare la puterea $997 \cdot 1 + 23 \cdot 2$, adică la o putere impară. Prin urmare, pe lângă 2017!, mai trebuie şters cel puţin un număr.

În fine, să observăm că $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \ldots \cdot 2015! \cdot 2016! = \big(1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2015! \cdot 2015!\big) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2016) = \big(1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2015!\big)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1008!$, deci, dacă îl ştergem pe 1008!, rămânem pe tablă cu un pătrat perfect.

În concluzie, numărul minim de numere care trebuie şterse de pe tablă pentru ca produsul celor rămase să fie pătrat perfect este 2.

Remarcă: De ce, după 2017, ne-am uitat la 997? Pentru că orice factor prim impar $p > 1008$ apare la puterea 1 în descompunerile în factori primi ale numerelor $p!$, $(p+1)!$, …, 2016!, adică apare la o putere pară $(2017 - p)$ în descompunerea produsului $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2016!$. Aceşti factori nu ne arată nimic, deci ne îndreptăm atenţia asupra unui număr prim ceva mai mic decât 1008.

Am primit soluţii de la: *Carol Luca Gasan, David Ghibu, Marin Hristov, Radu Şerban* şi *Ana Duguleanu.*

Problem of the week no. 207

On a blackboard are written the numbers 1!, 2!, 3!, …, 2017!. We wish to erase as few as possible of these numbers such that the product of all the remaining numbers is a perfect square. How many numbers must we erase?

Bulgarian Olympiad, 2017

Solution: The answer is 2.

Notice that 2017 is a prime number and that 2017 only appears (with exponent 1) in the prime factorization of 2017!. Therefore, unless we erase 2017! we can not obtain a perfect square. Erasing 2017!, the product of the numbers remaining on the board is not a perfect square. Indeed, the prime number 997 appears at exponent 1 in the prime factorizations of 997!, 998!, …, 1993!, at the exponent 2

in the prime factorizations of $1994!, 1995!, \ldots, 2016!$ (and does not appear in $1!$, $2!, \ldots, 996!$). Thus, in the prime factorization of the product $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2016!$, the prime factor 997 appears at the exponent $997 \cdot 1 + 23 \cdot 2$, i.e. at an odd exponent. Therefore, in order to obtain a perfect square, one must erase at least one other number besides $2017!$.
Finally, notice that $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \ldots \cdot 2015! \cdot 2016! = \big(1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2015! \cdot 2015!\big) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2016) = \big(1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2015!\big)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1008!$. Clearly, erasing $1008!$ leaves on the board numbers whose product is a perfect square.
In conclusion, the minimul number of numbers that one needs to erase from the board such that the product of the remaining numbers is a perfect square is 2.

Remark: Why, after 2017, did we look at 997? Because every (odd) prime $p > 1008$ appears at exponent 1 in the prime factorizations of the numbers $p!$, $(p+1)!, \ldots, 2016!$, and thus appears at an even exponent, $2017 - p$, in the prime factorization of the product $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2016!$. These factors are not helpful, this is why we look at a prime that is less than 1008.

A more detailed version of the same solution can be found at page 18 in Crux Mathematicorum