Viitori Olimpici-Etapa finală

18 august 2020

CLASA a VIII-a – soluţii

Problema 1. Aflaţi numerele naturale nenule a, b, c care îndeplinesc simultan condiţiile $(a^2+a+1)\vdots(bc)$, $(b^2+b+1)\vdots(ac)$ şi $(c^2+c+1)\vdots(ab)$.

Felician Preda

Soluţie: (Notăm cele trei relaţii în ordine (1), (2), (3)).

Cazul I: Două dintre numere sunt egale; fie $a=b$. Din relaţia a doua deducem $(a^2+a+1)\vdots a$, deci $a=b=1$. Din prima relaţie obţinem $c=1$ sau $c=3$.

Verificând, avem soluţiile $a=b=1$ şi $c\in\{1;3\}$ **1p**

Din simetrie mai avem şi soluţiile: $b=c=1$ şi $a\in\{1;3\}$; $a=c=1$ şi $b\in\{1;3\}$. **1p**

Cazul II: $a\neq b\neq c\neq a$.. **1p**

Considerăm $a>b>c$. Atunci $a\geq c+2$ şi $b\geq c+1$. **1p**

Deci $ab\geq(c+1)(c+2)=c^2+3c+2>c^2+c+1$, oricare $c\in\mathbb{N}^*$. **2p**

Aşadar relaţia (3) este imposibilă.. **1p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi S un punct in afara planului (ABC). Ştiind că ariile triunghiurilor SAB, SBC, SCD şi SDA sunt egale, demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Soluţie.

Notăm cu O piciorul perpendicularei din S pe planul (ABC). Notăm cu M, N, P şi Q picioarele perpendicularelor din O pe AB, BC, CD respectiv DA şi cu X, Y, Z, T mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DA.

Din teorema celor trei perpendiculare avem că SM, SN, SP şi SQ sunt perpendiculare pe AB, BC, CD respectiv DA deci înălţimile triunghiurilor date. Obţinem:

$$SM\cdot AB=SN\cdot BC=SP\cdot CD=SQ\cdot DA.$$

Rezultă că $SM\equiv SP$ şi $SN\equiv SP$ iar din teorema lui Pitagora deducem $OM\equiv OP$ şi $ON\equiv OQ$. În particular rezultă că O este intersecţia lui XZ cu YT deci intersecţia diagonalelor paralelogramului.. **2p**

Notăm $SO=x$, $OM=OP=m$, $ON=OP=n$, $AB=CD=a$ şi $BC=AD=b$.

Egalând ariile triunghiurilor SAB şi SBC obţinem:

$$\sqrt{m^2+x^2}\cdot a=\sqrt{n^2+y^2}\cdot b.$$

Scriind aria paralelogramului $ABCD$ în două moduri obţinem:

$$MP\cdot AB=NQ\cdot BC$$

adică

$$m\cdot a=n\cdot b.$$

Deducem că
$$\sqrt{m^2+x^2}\cdot n=\sqrt{n^2+y^2}\cdot m.$$

Ridicăm la pătrat şi, deoarece x este nenul, obţinem $m=n$ şi atunci $a=b$, prin urmare $ABCD$ este romb. **5p**

Problema 3. Într-un dreptunghi de dimensiuni 40×30, fiecare pătrat 1×1 este colorat alb sau negru. Numim ”transformare” schimbarea culorilor tuturor pătratelor 1×1 de pe aceeaşi linie sau de pe aceeaşi coloană. Iniţial, toate cele 40×30 pătrate sunt de culoare albă. Decideţi dacă după o succesiune de transformări putem obţine exact 692 pătrate negre.

Gazeta Matematică

Soluţie:

Culoarea unui pătrat 1×1 de la final depinde doar de numărul total de ”transformări” pe care le-au avut linia şi coloana pe care se află (adică numărul de transformări în care a fost implicat). Deci nu contează ordinea în care au fost făcute transformările. **1p**

Dacă la final un pătrat este alb însemnă că a fost implicat într-un număr par de transformări, iar dacă e negru a fost implicat într-un număr impar de transformări. Aşadar, fără a restrânge generalitatea, presupunem că fiecărei linii şi coloane li se aplică cel mult o transformare. **1p**

Fie n linii cărora li se aplică o transformare, $0\le n\le 40$ şi m coloane cărora li se aplică o transformare, $0\le m\le 30$. **1p**

Pătrate negre vor fi numai pe liniile şi coloanele implicate în transformări, dar nu şi cele $m\times n$ pătrate aflate la intersecţia liniilor şi coloanelor implicate în transformari. **1p**

Numărul pătratelor negre este deci: $(30n+40m-mn)-mn=30n+40m-2mn$. (am numărat câte sunt în total pe cele n linii şi m coloane şi am scăzut pe cele mn care sunt albe). **1p**

Obţinem relaţia $30n+40m-2mn=692$ care are soluţiile naturale $n=18$ şi $m=38$, respectiv $n=19$ şi $m=61$. **1p**

Deoarece $m\le 30$, răspunsul e negativ. **1p**