Proba scrisă Viitori olimpici 2020

Probleme și soluții orientative

cls VII

1. Se consideră două numere $a, b \in R/Q$ astfel încât $a + b \in Q, a^3 + b^3 \in Q$ și $a + b^2 \in Q$.
   a) Arătați că $a^2 + b \in Q$.
   b) Arătați că există o infinitate de numere iraționale ce verifică condițiile date. (**Gazeta matematica nr. 6-7-8, 2020**)

Soluție

a) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \in Q \Longrightarrow a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} \in Q$

$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \in Q \Longrightarrow ab = \frac{(a+b)^3-(a^3+b^3)}{3(a+b)} \in Q$

Adunând cele două relații $\Longrightarrow a^2 + b^2 \in Q$

Folosind $a + b^2 \in Q$ se obține $a^2 - a = a^2 + b^2 - (a + b^2) \in Q$

Deoarece $a + b \in Q$ avem $a^2 + b = (a^2 - a) + (a + b) \in Q$

b) Fie $a = \frac{1}{m+\sqrt{x}}$ si $b = \frac{1}{m-\sqrt{x}}$ unde m, x sunt numere naturale nenule și $m \neq \sqrt{x}$.

Încercăm să găsim o legătură între x și m.

Observăm că $a + b = \frac{2m}{m^2-x} \in Q$ iar $a^3 + b^3 = \frac{2(m^3+3mx)}{(m^3+3mx)^2-(3m^2+x)^2x} \in Q$

$$a + b^2 = \frac{m^3 + m^2 - mx + x + (x + 2m - m^2)\sqrt{x}}{(m^2 - x)^2}$$

Condiția ca $a + b^2 \in Q$ implică $x + 2m - m^2 = 0$ sau $x = m^2 - 2m$.

Pentru ca $x \neq 0 \Longrightarrow m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Astfel, există o infinitate de numere iraționale de forma $a = \frac{1}{m+\sqrt{m^2-2m}}$ și $b = \frac{1}{m-\sqrt{m^2-2m}}$ cu m numar natural mai mare ca 2, ce verifică condițiile date.

2. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului ACB de 50°. Punctele M și N sunt situate pe latura AB astfel încât unghiurile ACM și NCB au măsura de 10°.
   a) Arătați că $MB = MC$.
   b) Demonstrați că $2AM = BN$.

(Examenul național de definitivare în învățământ 2020)

2.	**a)** Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $\sphericalangle MBC = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$	**2p**
	$\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$, deci $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle MBC$	**3p**
	Triunghiul MCB este isoscel cu vârful în M, deci $MB = MC$	**2p**
	b) Dacă punctul P este simetricul punctului M față de punctul A, cum $AC \perp AB$, obținem că ΔPCM este isoscel, deci $PC = MC$	**2p**
	$\sphericalangle PNC = 50^\circ$, $\sphericalangle ACN = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ și, cum $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACP$, obținem $\sphericalangle PCN = 50^\circ$, deci ΔPCN este isoscel $\Rightarrow PC = PN$	**3p**
	$MB = MC$, deci $PN = MB \Rightarrow MN + PM = BN + MN$, de unde obținem $PM = BN$, deci $BN = 2AM$	**3p**

3. Având la dispoziție o monedă și o tablă de șah cu 8 linii și 8 coloane, Ana si Bogdan joacă un joc.
   Pas1. La început Ana pune moneda într-un pătrățel la tablei.

Pas 2. Bogdan mută moneda într-un alt pătrățel aflat pe aceeași linie sau coloană **(mișcarea turei la șah).**

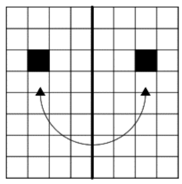
Pas 3. Ana mută moneda într-un pătrățel aflat pe aceeași linie sau coloană cu pătrățelul în care s-a aflat moneda la pasul 2.

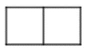
Pas 4. Jocul continuă alternativ cu condiția ca moneda sa nu fie așezată într-un pătrățel în care a mai stat.

Pas 5. Jocul se termină când un jucător nu mai poate muta moneda, el fiind declarat învins.

Arătați că Bogdan poate adopta o strategie câștigătoare, indiferent de mișcările Anei.

Soluția 1. Împărțim tabla în două dreptunghiuri egale ca în figură.
La fiecare mutare a Anei, Bogdan va muta moneda
în poziția simetrică față de linia îngroșată.
În final, Ana nu va mai avea posibilitate de mutare.



Soluția 2. Împărțim tabla în 8×4 dreptunghiuri de forma  .
La fiecare mutare a Anei într-un pătrățel, Bogdan va muta moneda în celălalt pătrățel al dreptunghiului.
Această mutare este posibilă deoarece,

- noul pătrățel se găsește pe aceeași linie.
- noul pătrățel nu a fost ocupat până acum(dacă ar fi fost ocupat, atunci ar fi fost ocupat de Bogdan).

În final, Ana nu va mai avea posibilitate de mutare.

OBS Orice altă metodă de rezolvare se va puncta corespunzător.