Problema săptămânii 204

Un număr natural se numeşte *separabil* dacă putem împărţi cifrele sale în două grupe care au aceeaşi sumă. De exemplu, 1241 este separabil pentru că $1+1+2=4$. Spunem despre un număr n că este 7-*separabil* dacă fiecare dintre numerele $n-7$, n şi $n+7$ este separabil.

a) Arătaţi că există o infinitate de numere 7-separabile.

b) Determinaţi cel mai mic număr 7-separabil.

Olimpiadă Columbia, 2004

Soluţie:

a) Numărul 1423 este 7-separabil deoarece:

• 1423 este separabil $(1+4=2+3)$,

• $1423-7=1416$ este separabil $(1+4+1=6)$,

• $1423+7=1430$ este separabil $(1+3=4+0)$.

Pornind de la un număr 7-separabil, obţinem o infinitate de alte numere 7-separabile adăugându-i în faţă un număr separabil, de exemplu $\underbrace{1100\ldots0}_{n \text{ cifre}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Este uşor de văzut că toate numerele de forma $1100\ldots01423$ sunt 7-separabile.

b) Vom demonstra că 1423 este cel mai mic număr 7-separabil. Deoarece orice număr separabil are suma cifrelor pară, este evident că ultima cifră a unui număr 7-separabil, n, nu poate fi 0, 1, 2 (suma cifrelor lui $n+7$ ar avea altă paritate decât suma cifrelor lui n) şi nu poate fi nici 7, 8 sau 9 (suma cifrelor lui $n-7$ ar avea altă paritate decât suma cifrelor lui n).

Numerele separabile care au ultima cifră 3, 4, 5 sau 6, mai mici ca 1423 sunt:

• numere de două cifre: 33, 44, 55, 66,

• numere de trei cifre în care ultima e suma celorlalte două: 123, 213, 303, 134, 224, 314, 404, 145, 235, 325, 415, 505, 156, 246, 336, 426, 516, 606,

• numere de trei cifre în care prima cifră este suma celorlalte două: 413, 514, 523, 615, 624, 633, 716, 725, 734, 743, 826, 835, 844, 853, 936, 945, 954, 963,

• numere de trei cifre în care cifra zecilor este suma celorlalte două: 143, 154, 253, 165, 264, 363, 176, 275, 374, 473, 286, 385, 484, 583, 396, 495, 594, 693,

• numere de patru cifre în care ultima cifră este suma celorlalte trei: 1023, 1113, 1203, 1034, 1124, 1214, 1304, 1045, 1135, 1225, 1315, 1405, 1056, 1146, 1236, 1326, 1416,

• numere de patru cifre în care cifra zecilor este suma celorlalte trei: 1043, 1054, 1153, 1065, 1164, 1263, 1076, 1175, 1274, 1373, 1186, 1285, 1384, 1296, 1395,

• numere de patru cifre în care cifra sutelor este suma celorlalte trei: 1403,

• celelalte numere de patru cifre (în care cifra miilor, adunată cu o altă cifră, face cât suma celorlalte două): 1133, 1144, 1155, 1166, 1223, 1243, 1234, 1254, 1245, 1265, 1256, 1276, 1313, 1353, 1324, 1364, 1335, 1375, 1346, 1386.

(Am omis la fiecare categorie acele numere pe care le considerasem deja într-o categorie anterioară.)

Se verifică uşor că niciunul din aceste numere nu este 7-separabil, adică pentru fiecare din ele, cel puţin unul dintre numerele $n-7$ şi $n+7$ nu este separabil.

Am primit soluţii de la *Carol Luca Gasan* şi *David Ghibu*.

Problem of the week no. 204

We call a positive integer *separable* if one can split its digits into two groups that have the same sum. For example, 1241 is separable because $1+1+2=4$.
We call a positive integer n *7-separable* if each of the numbers $n-7$, n and $n+7$ is separable.
a) Prove that there exist infinitely many 7-separable numbers.
b) Find the smallest 7-separable number.

Colombian Olympiad, 2004

Solution:
a) The number 1423 is 7-separable because:
- 1423 is separable $(1+4=2+3)$,
- $1423-7=1416$ is separable $(1+4+1=6)$,
- $1423+7=1430$ is separable $(1+3=4+0)$.

Starting from a 7-separable number, one can obtain infinitely many other 7-separable numbers by adding, in front of a 7-separable number, an arbitrary separable numbers. For example, one could add $\underbrace{1100\ldots0}_{n \text{ digits}}$, where $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, obtaining $1100\ldots01423$ which are all 7-separable.
Alternatively, one could consider numbers of the type $\underbrace{111\ldots1}_{2n+1 \text{ digits}}3$, where $n\geq 4$.

b) We prove that 1423 is the smallest 7-separable number. Clearly, any separable numbers must have an even digit sum. We deduce that the last digit of a 7-separable number n cannot be 0, 1, or 2 (the sum of the digits of $n+7$ would have a different parity than the sum of the digits of n), and it cannot be 7, 8 or 9 either (the sum of the digits of $n-7$ would have a different parity than the sum of the digits of n).

We list the numbers that are separable, end in the one of the digits 3, 4, 5 or 6, and are less than 1423:
- two digit numbers: 33, 44, 55, 66,
- three digit numbers in which the last one is the sum of the other two: 123, 213, 303, 134, 224, 314, 404, 145, 235, 325, 415, 505, 156, 246, 336, 426, 516, 606,
- three digit numbers in which the first digit is the sum of the other two: 413, 514, 523, 615, 624, 633, 716, 725, 734, 743, 826, 835, 844, 853, 936, 945, 954, 963,
- three digit numbers in which the second digit is the sum of the other two: 143, 154, 253, 165, 264, 363, 176, 275, 374, 473, 286, 385, 484, 583, 396, 495, 594, 693,
- four digit numbers in which the last digit is the sum of the other three: 1023, 1113, 1203, 1034, 1124, 1214, 1304, 1045, 1135, 1225, 1315, 1405, 1056, 1146, 1236, 1326, 1416,

• four digit numbers in which the third digit is the sum of the other three: 1043, 1054, 1153, 1065, 1164, 1263, 1076, 1175, 1274, 1373, 1186, 1285, 1384, 1296, 1395,
• four digit numbers in which the second digit is the sum of the other three: 1403,
• four digit numbers for which the first digit, added to another digit, gives the sum of the remaining two digits: 1133, 1144, 1155, 1166, 1223, 1243, 1234, 1254, 1245, 1265, 1256, 1276, 1313, 1353, 1324, 1364, 1335, 1375, 1346, 1386.
(We have omitted from each category the numbers already considered in a previous one.)
It is easy to check that none of these numbers is 7-separable, i.e. either $n-7$ or $n+7$ (or both) is not separable.

You can find the official solution here, in Spanish.