Problema săptămânii 203
Fie N numărul de moduri în care îl putem scrie pe 2020 sub forma

$$2020 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

unde numerele a_i sunt întregi, cu $0 \leq a_i \leq 99$. Un exemplu de o asemenea scriere este $1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 67 \cdot 10^1 + 50 \cdot 10^0$. Aflaţi N.

adaptare după *AIME* 2010

Soluţia 1: Orice număr mai mic decât 100^2 are două cifre în baza 100, deci se scrie în mod unic sub forma $c_1 \cdot 100 + c_0$, cu $0 \leq c_0, c_1 \leq 99$.
Dacă $0 \leq a_0, a_1, a_2, a_3 \leq 99$ satisfac $2020 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, atunci numerele $u = 100a_3 + a_1$ şi $v = 100a_2 + a_0$ satisfac ecuaţia $2020 = 10u + v$, $u, v < 100^2$. Reciproc, graţie scrierii în baza 100 de care am vorbit, orice numere $u, v < 100^2$ pot fi scrise în mod unic sub forma $u = 100a_3 + a_1$, $v = 100a_2 + a_0$, deci fiecărei soluţii a ecuaţiei $10 + u + v = 2020$, $u, v < 100^2$ îi corespunde câte o scriere a lui 2020 sub forma cerută. Aşadar, avem la fel de multe scrieri ca şi soluţii ale ecuaţiei $10u + v = 2020$. Această ecuaţie are 203 soluţii (u poate fi orice număr de la 0 la 202, deci poate fi ales în 203 moduri, iar orice alegere a lui u îl determină în mod unic pe v).Aşadar, problema săptămânii 203 are 203 soluţii.

Soluţia 2: Scriind fiecare din numerele $a_i = 10b_i + c_i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, b_i, c_i cifre în baza 10, problema revine la $\overline{b_3b_2b_1b_00} + \overline{c_3c_2c_1c_0} = 2020$ (scriere în care prima cifră nu este neapărat nenulă), adică la ecuaţia $2u + v = 2020$. Această ecuaţie are, în mod evident, 203 soluţii.

Am adaptat problema după AIME 2010. Soluţii ale problemei originale (care are răspunsul 202, nu 203) găsiţi aici, inclusiv în format video.

Am primit soluţii de la: *David-Andrei Anghel, Carol Luca Gasan, Radu Şerban, Ana Duguleanu, Marin Hristov, David Ghibu, Albert Romaniuc* şi *Mihai Miculiţa.*

Problem of the week no. 203
Let N be the number of ways to write 2020 in the form

$$2020 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

where the a_i's are integers, and $0 \leq a_i \leq 99$. An example of such a representation is $1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 67 \cdot 10^1 + 50 \cdot 10^0$. Find N.

The problem is adapted from AIME 2010, where instead of 2020 stands 2010, and the answer is 202. The answer to our problem is 203. You can easily adapt the solutions from here. (There is also a video solution.)