Problema săptămânii 202
Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi numerele reale $x \geq -1$ pentru care inegalitatea

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1a_2\ldots a_n+x}{2}$$

are loc pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$.

Soluţie:
În particular, inegalitatea trebuie să fie verificată în cazul $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Obţinem $\frac{(1+x)^n}{2^n} \leq \frac{1+x}{2}$, adică $1+x \leq 2$, deci $x \leq 1$. Deducem că $x \in [-1, 1]$.

Demonstrăm acum că pentru orice $x \in [-1, 1]$ are loc inegalitatea din enunţ. Vom demonstra inegalitatea prin inducţie după n.
Pentru $n = 2$: fie $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1$. Atunci

$$\frac{a_1a_2+x}{2} - \frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} = \frac{2a_1a_2+2x-a_1a_2-a_1x-a_2x-x^2}{4} =$$

$$\frac{(a_1-x)(a_2-x)+2x-2x^2}{4} \geq \frac{(1-x)^2+2x-2x^2}{4} = \frac{1-x^2}{4} \geq 0,$$

deci inegalitatea este adevărată pentru $n = 2$.
Presupunând inegalitatea adevărată pentru $n-1$ numere, să o demonstrăm pentru n. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$, atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \geq 1$, deci

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}+x}{2} \cdot \frac{a_n+x}{2} \overset{P(n-1)}{\leq} \frac{a_1a_2 \ldots a_{n-1}+x}{2} \cdot \frac{a_n+x}{2} \overset{P(2)}{\leq} \frac{a_1a_2 \ldots a_n+x}{2}.$$

În concluzie, răspunsul este $x \in [-1, 1]$.

Am primit soluţii de la *David Andrei Anghel, Radu Şerban, Marin Hristov, Ana Duguleanu, Selim Cadîr* şi *Robert Gîdea.*

Problem of the week no. 202
Let $n \geq 2$ be an integer. Find all real numbers $x \geq -1$ such that the following inequality holds

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1a_2\ldots a_n+x}{2}$$

for all $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$.

Solution:
In particular, the inequality must hold in case $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. We obtain $\frac{(1+x)^n}{2^n} \leq \frac{1+x}{2}$, i.e. $1+x \leq 2$, hence $x \leq 1$. It follows that $x \in [-1, 1]$.

Next, we prove that the inequality holds for all $x \in [-1, 1]$. We use induction after n.
For $n = 2$: let $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 1$. Then

$$\frac{a_1a_2 + x}{2} - \frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} = \frac{2a_1a_2 + 2x - a_1a_2 - a_1x - a_2x - x^2}{4} =$$

$$\frac{(a_1 - x)(a_2 - x) + 2x - 2x^2}{4} \geq \frac{(1 - x)^2 + 2x - 2x^2}{4} = \frac{1 - x^2}{4} \geq 0,$$

so the inequality holds for $n = 2$.
Assuming the inequality to be valid for $n-1$ numbers, let us prove it for n numbers.
If $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$, then $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \geq 1$, therefore

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1} + x}{2} \cdot \frac{a_n + x}{2} \overset{P(n-1)}{\leq} \frac{a_1a_2 ... a_{n-1} + x}{2} \cdot \frac{a_n + x}{2} \overset{P(2)}{\leq} \frac{a_1a_2 ... a_n + x}{2}.$$

In conclusion, the answer is $x \in [-1, 1]$.