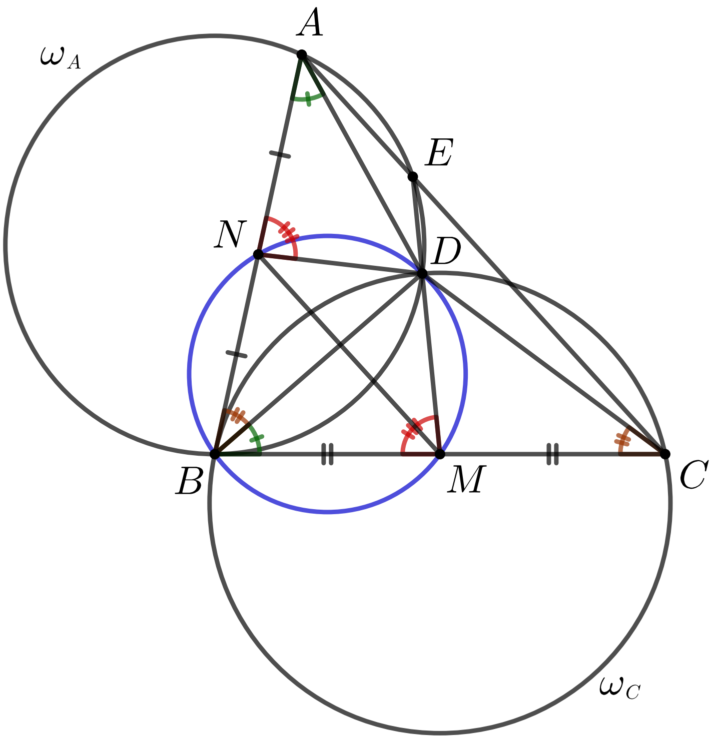
Problema săptămânii 201

Fie ABC un triunghi. Cercul ω_A trece prin A şi este tangent în B la BC. Cercul ω_C trece prin C şi este tangent în B la AB. Cercurile ω_A şi ω_C se intersectează din nou în punctul D. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$, iar cu E intersecţia dreptelor MD şi AC. Arătaţi că E se află pe cercul ω_A.

Olimpiadă Benelux, 2020

Soluţia 1: (oficială)

Fie N mijlocul laturii $[AB]$. Avem $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BAD$ (subîntind arcul $\widehat{BD}$ al cercului ω_A) şi, analog, $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCB$, astfel că triunghiurile DAB şi DBC sunt asemenea. Cum M şi N sunt mijloacele segmentelor $[BC]$ şi $[AB]$, triunghiurile AND şi BMD sunt şi ele asemenea. În particular, $m(\sphericalangle BND) = 180° - m(\sphericalangle DNA) = 180° - m(\sphericalangle DMB)$, deci patrulaterul $BNDM$ este inscriptibil. Dar $MN \parallel AC$ (linie mijlocie), deci $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DBN \equiv \sphericalangle DMN \equiv \sphericalangle EMN \equiv \sphericalangle MEC \equiv \sphericalangle DEC$, adică punctele E, A, D, B sunt conciclice.

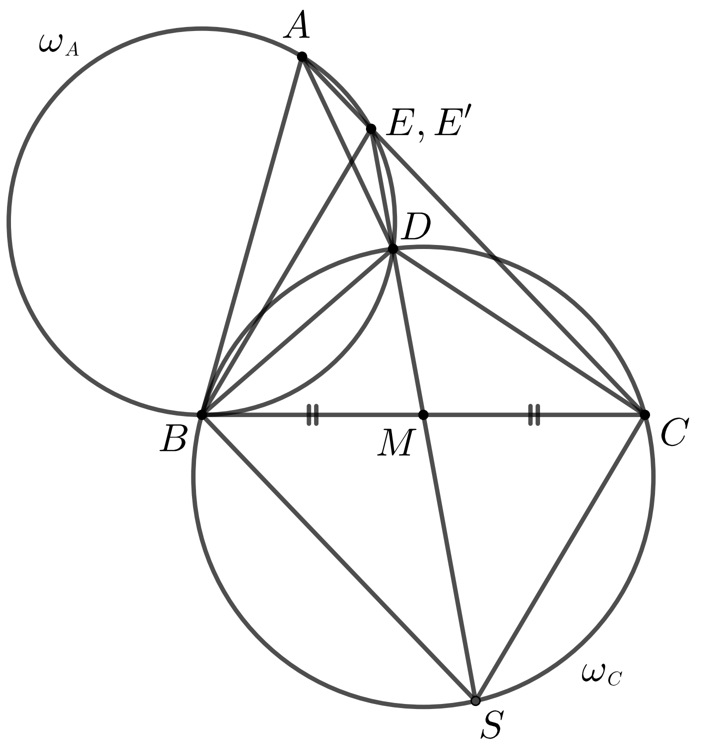


Soluţia 2: (adaptare după soluţia oficială)

Fie S intersecţia paralelei prin B la AC cu cercul ω_C şi E' simetricul lui S faţă de M. Atunci $BSCE'$ este paralelogram, deci E' se află pe AC.

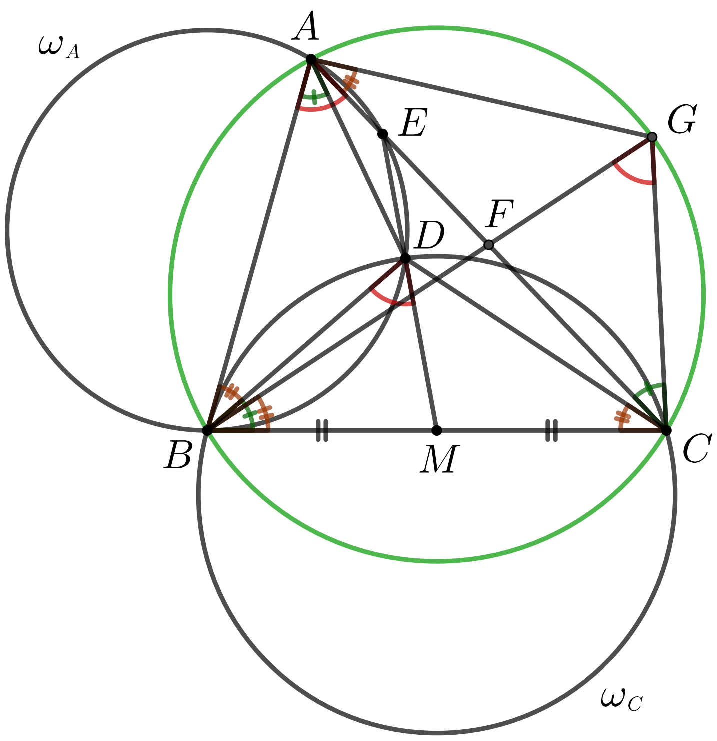
Avem $m(\sphericalangle AE'B) = 180° - m(\sphericalangle CE'B) = 180° - m(\sphericalangle BSC) = 180° - m(\sphericalangle ABC)$ (subîntind arcul $\widehat{BDC}$ al cercului ω_C). Cum $m(\sphericalangle ABC) = 180° - m(\sphericalangle ADB)$ (din cercul ω_A), rezultă $\sphericalangle AE'B \equiv \sphericalangle ADB$, deci E' se află pe ω_A.

În plus, $m(\sphericalangle AE'D) = 180° - m(\sphericalangle ABD) = 180° - m(\sphericalangle BSD)$ şi, deoarece AE' este paralelă cu BS, deducem din axioma paralelelor că E', D şi S sunt coliniare, deci $E' = E$, adică $E \in \omega_A$.



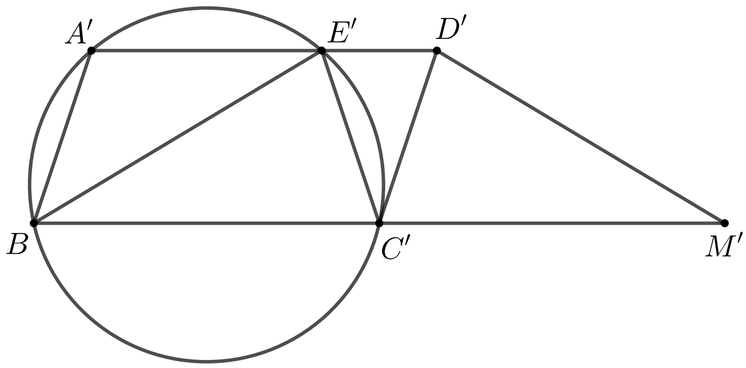
(Soluţia oficială lucrează cu unghiuri orientate; o puteţi consulta aici; figura este în cazul $A \in (EC)$.)

Soluţia 3: (*David Andrei Anghel*)



Avem $\sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle DBA$ şi $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DBC$, deci D este punctul B-dumpty (vezi On Two Special Points in Triangle) al triunghiului ABC.
Fie F mijlocul lui $[AC]$ şi G a doua intersecţie a dreptei AF cu cercul circumscris triunghiului ABC.
Considerăm cazul $E \in (AC)$, $D \in (EM)$, celelalte cazuri fiind analoage.
Deoarece $m(\sphericalangle EDB) = 180^\circ - m(\sphericalangle MDB)$, avem de arătat că $m(\sphericalangle MDB) = m(\sphericalangle BAC)$. Dar $\sphericalangle GAC \equiv \sphericalangle GBC \equiv \sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCB$ şi $\sphericalangle GCA \equiv \sphericalangle GBA \equiv \sphericalangle DBC$ (simediana şi mediana sunt izogonale), deci triunghiurile GAC şi DCB sunt asemenea. Cum M şi F sunt mijloace, vom avea $\sphericalangle MDB \equiv \sphericalangle FGC \equiv \sphericalangle BGC \equiv \sphericalangle BAC$, c.c.t.d.

Soluţia 4: (*Robert Gîdea*)
Fie $\{E\} = \omega_A \cap AC$. Demonstrăm că $E \in DM$. Facem o inversiune de centru B şi rază R oarecare. Pentru orice punct X notăm cu X' imaginea sa prin inversiune. Inversiunea duce dreapta $B-M-C$ în ea însăşi. Avem $BC' \cdot BC = R^2 = BM' \cdot BM$ şi $BC = 2BM$, de unde $BM' = 2BC'$ adică C' este mijlocul lui $[BM']$.
Cercul ω_A care trece prin B este dus într-o dreaptă $A' - E' - D'$. Cum ω_A era tangentă la BC, vom avea $A'D' \parallel BC'$. La fel, cercul ω_C, tangent dreptei AB, va fi dus în dreapta $C'D' \parallel BA'$. Astfel, $A'BC'D'$ este paralelogram. Dreapta $E - A - C$ care nu trece prin B este dusă în cercul circumscris triunghiului $BA'C'$, deci $A'BC'E'$ este trapez isoscel. Concluzia $E \in DM$ este echivalentă cu B, E', D', M' conciclice, lucru extrem de uşor de arătat.



Am mai primit soluţii de la *Radu Şerban, Andrei Pană* şi *Ana Duguleanu.*

Problem of the week no. 201
Let ABC be a triangle. The circle ω_A through A is tangent to line BC at B. The circle ω_C through C is tangent to line AB at B. Let ω_A and ω_C meet again at D. Let M be the midpoint of line segment $[BC]$, and let E be the intersection of lines MD and AC. Show that E lies on ω_A.

Benelux Mathematical Olympiad

Two solutions can be found on the official web page of the competition.