Problema săptămânii 200

Se consideră o tablă $n \times n$ ($n \geq 2$) ale cărei pătrate sunt completate cu numerele $1, 2, \ldots, n^2$. Putem înmulţi cu orice număr real numerele din oricare două pătrate adiacente. Să se afle numărul maxim de 1 pe care îl conţine o tablă cu elemente raţionale obţinută din cea iniţială.

Gabriel Dospinescu

Soluţie: Vom demonstra că numărul maxim este $n^2 - 1$.

Observăm că putem transforma succesiv în 1 primele $n-1$ numere de pe linia 1. Procedăm astfel: înmulţim numerele situate pe primele două coloane ale acestui rând cu un număr ales astfel încât numărul de pe coloana 1 să devină 1. Apoi înmulţim numerele situate pe coloanele 2 şi 3 ale rândului 1 astfel încât numărul de pe coloana 2 să devină 1. (Procedând astfel, niciodată nu vom produce 0-uri, astfel că vom putea mereu înmulţi cu inversul numărului pe care dorim să-l facem 1.) Continuăm procedeul până când, înmulţind convenabil numerele de pe ultimele două coloane ale liniei 1, facem ca şi numărul de pe penultima coloană să fie 1. Procedăm apoi similar pe celelalte linii. La sfârşit, toate numerele de pe primele $n-1$ coloane vor fi 1, iar celelalte vor fi numere raţionale nenule. Putem proceda ca mai sus pentru a transforma în 1-uri toate elementele de pe primele $n-1$ poziţii ale coloanei n. Cu eventuala excepţie a numărului de pe linia n, coloana n, toate numerele din tabel sunt egale cu 1, deci maximul cerut este $n^2 - 1$ sau n^2.

Demonstrăm în continuare că nu putem obţine n^2 numere egale cu 1 în tabel.

Evident, dacă înmulţim vreodată cu 0, vom obţine doi de 0 în tabel care nu vor mai putea fi modificaţi ulterior. Aşadar, nu înmulţim niciodată cu 0.

Dacă am colora pătrăţelele tablei alternativ cu alb şi negru, ca pe-o tablă de şah, orice înmulţire a două pătrăţele adiacente va afecta un pătrăţel negru şi unul alb, astfel că, dacă facem produsul numerelor aflate în pătrăţelele albe şi produsul numerelor aflate în pătrăţelele negre, raportul dintre aceste două produse rămâne neschimbat la fiecare mutare, adică este invariant. Presupunând că la sfârşit toate numerele de pe tablă ar fi 1, cele două produse ar fi, la sfârşit, egale, deci ele trebuie să fi fost egale şi la început. Notând cu P valoarea iniţială a celor două produse, produsul numerelor scrise iniţial pe tablă ar fi $P^2 = n^2!$, deci $n^2!$ ar fi pătrat perfect. Însă acest lucru nu este posibil (pentru $n \geq 2$): conform postulatului lui Bertrand, între $\frac{n^2}{2}$ şi n^2 există cel puţin un număr prim, iar acesta apare la puterea 1 în descompunerea în factori primi a numărului $n^2!$. Prin urmare, $n^2!$ nu este pătrat perfect. Conchidem că nu putem obţine n^2 de 1 pe tablă, deci numărul maxim este $n^2 - 1$.

Am primit soluţii de la: *Andrei Giovani Chiriţă, Andrei Pană, David Andrei Anghel, Radu Şerban, Robert Gîdea, Edward Torac, Carol Luca Gasan* şi *Ana Duguleanu.*

Problem of the week no. 200

Consider an $n \times n$ ($n \geq 2$) board whose unit squares are filled with the numbers $1, 2, \ldots, n^2$. One can multiply the numbers situated in two adjacent unit squares with any real number. Find the maximum number of occurrences of the number 1 that a configuration obtained from the initial one could contain.

Gabriel Dospinescu

Solution: We prove that the maximum number is $n^2 - 1$.

We notice that we can successively transform into 1 the first $n-1$ numbers from the first row. We proceed as follows: we multiply the numbers situated in the first two columns with a number chosen such that the number in the first column becomes 1. Then we multiply the numbers in columns 2 and 3 by a number chosen such that the number in column 2 becomes 1. We continue in this manner until the first $n-1$ numbers of the row are all equal to 1. Notice that we always multiply the two numbers with the inverse of one of them, and that we can always do so because the numbers on the board remain positive. Next, we repeat the steps above for each of the remaining rows. Now, all the numbers situated in the first $n-1$ columns are equal to 1. Finally, we repeat the procedure for the last column, making 1 all the numbers of the board, with the possible exception of the number in row no. n, column no. n.

Thus, we can always make 1 at least $n^2 - 1$ numbers of the board.

Now we prove that it is not possible to make 1 all the numbers of the board.

Multiplying by 0 turns two numbers into 0, and these numbers remain equal to 0 all the way, so we can never multiply by 0.

Let us color the unit squares of the board in black and white, in a chessboard pattern. Any move affects a number written in a black square and a number written in a white square. Look at the product of the numbers in the black squares and the product of the numbers situated in white squares. Multiplying by a non-zero number a two adjacent numbers will multiply both products by a, which means it won't change their ratio: the ratio between the product of the numbers in the black squares and the product of the numbers in the white squares is an invariant.

Assuming one could obtain n^2 numbers equal to 1 on the board, we would have this ratio equal to 1 in the final configuration, which means it must have been equal to 1 in the initial configuration as well. Denoting by P the initial value of both these products, we see that initially the product of the numbers written on the board is $n^2! = P^2$, so this might be possible only if $n^2!$ is a perfect square. But this never happens for $n \geq 2$: according to Bertrand's postulate, there is always a prime number between $\frac{n^2}{2}$ and n^2. This prime number only occurs once in the prime factorization of $n^2!$, therefore $n^2!$ is not a perfect square.

We conclude that one can not obtain n^2 numbers equal to 1 on the board, so the maximum number is $n^2 - 1$.