Problema săptămânii 199
Fie d un număr natural diferit de $2, 5$ şi 13. Arătaţi că există a, b, elemente diferite ale mulţimii $\{2, 5, 13, d\}$, astfel încât $ab - 1$ nu este pătrat perfect.

OIM, 1986

Soluţie:
Dacă d este par, $2d - 1 \equiv 3 \pmod 4$, deci putem alege $a = 2$, $b = d$.
Arătăm că dacă d este impar, atunci cel puţin unul din numerele $5d - 1$ şi $13d - 1$ nu este pătrat perfect. Presupunând, prin absurd, că $5d - 1 = a^2$, $13d - 1 = b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că a şi b sunt pare. Dacă $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, atunci $8d = b^2 - a^2$, deci $2d = b_1^2 - a_1^2 = (b_1 - a_1)(b_1 + a_1)$. Rezultă că a_1 şi b_1 au aceeaşi paritate, apoi că d este par, ceea ce este o contradicţie.

Am primit soluţii de la *Andrei Giovani Chiriţă, Albert Romaniuc, Carol Luca Gasan, David Ghibu, Edward Torac, David Andrei Anghel, Selim Cadîr, Radu Şerban, Ana Duguleanu, Ioana Stănoiu* şi *Robert Gîdea.*

Problem of the week no. 199
Let d be any positive integer not equal to $2, 5$ or 13. Show that one can find distinct a, b in the set $\{2, 5, 13, d\}$ such that $ab - 1$ is not a perfect square.

IMO, 1986

Solution: If d is even, $2d - 1 \equiv 3 \pmod 4$, therefore one can choose $a = 2$, $b = d$. Next, we prove that, if d is odd, at least one of the numbers $5d - 1$ and $13d - 1$ is not a perfect square. Assuming that $5d - 1 = a^2$, $13d - 1 = b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$, it follows that a and b are both even. If $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, then $8d = b^2 - a^2$, hence $2d = b_1^2 - a_1^2 = (b_1 - a_1)(b_1 + a_1)$. It follows that a_1 and b_1 are either both odd or both even, which leads to d being even, a contradiction.