Problema săptămânii 198
Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:
a) dacă $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, atunci $x+y=0$;
b) dacă $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})=1$, atunci $x+y=0$.

Soluţii pentru punctul a)

Soluţia 1: (*Adrian Zanca*)
Amplificând cu conjugatele, relaţia revine la

$$1=(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}-y).$$

Desfăcând parantezele, atât în relaţia din enunţ cât şi în cea de mai sus, se obţine

$$xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}-x\sqrt{y^2+1}-y\sqrt{x^2+1}=1$$

şi

$$xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=1.$$

Deducem că $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=0$, deci $x\sqrt{y^2+1}=-y\sqrt{x^2+1}$. Atunci x şi y au semne contrare şi $x^2(y^2+1)=y^2(x^2+1)$, adică $x^2=y^2$, deci $x=-y$.

altă finalizare: Din cele de mai sus obţinem $xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=1$, deci $(x^2+1)(y^2+1)=(1-xy)^2$, de unde $x^2+y^2=-2xy$ şi concluzia.

Soluţia 2: (*David Anghel, Albert Romaniuc, Ana Duguleanu, Selim Cadîr*)
Relaţia din enunţ se poate scrie şi sub forma $x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$, şi sub forma $y+\sqrt{y^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1}$, adică $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$, respectiv $x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}$. Adunând aceste două relaţii obţinem concluzia.

Soluţia 3: Deoarece $\sqrt{x^2+1}>|x|$, numerele din cele două paranteze sunt pozitive. Unul trebuie să fie subunitar, celălalt supraunitar (sau ambele 1). Să presupunem $y+\sqrt{y^2+1}\leq 1\leq x+\sqrt{x^2+1}$. Deoarece $\sqrt{y^2+1}\geq 1$, deducem că $y\leq 0$. Pe de altă parte, $\sqrt{x^2+1}\geq 1-x$ implică $x\geq 0$, în caz contrar obţinându-se $x^2+1\geq 1-2x+x^2$, contradicţie. Relaţia din enunţ revine la $x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}$.
Dacă $0\leq -y<x$ atunci $x+\sqrt{x^2+1}>-y+\sqrt{(-y)^2+1}$, iar dacă $0\leq x<-y$ atunci $x+\sqrt{x^2+1}<-y+\sqrt{(-y)^2+1}$. Obţinem, aşadar, $-y=x$ şi concluzia.

Soluţia 4: (*Vlad Spătaru*)
Dacă $(x_1+\sqrt{x_1^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$ şi $(x_2+\sqrt{x_2^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, atunci $x_1+\sqrt{x_1^2+1}=x_2+\sqrt{x_2^2+1}$, deci $x_1-x_2=\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}$. Prin ridicare la pătrat, $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2-2\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$, adică $\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=1+x_1x_2$. Printr-o nouă ridicare la pătrat ajungem la $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=0$, deci la $x_1=x_2$.
Cum $x_1=x$ şi $x_2=-y$ verifică relaţiile de mai sus, deducem că $x=-y$.

Soluţii pentru punctul b)

Soluţia 1: Dacă $x+\sqrt{y^2+1}<0$ şi $y+\sqrt{x^2+1}<0$, atunci $0<\sqrt{y^2+1}<-x$ şi $0<\sqrt{y^2+1}<-y$, deci $y^2+1<x^2$ şi $y^2<x^2+1$. Prin adunare se ajunge la o contradicţie.
Aşadar, $x+\sqrt{y^2+1}>0$ şi $y+\sqrt{x^2+1}>0$. Unul dintre factori va fi subunitar, celălalt supraunitar (sau ambele 1). Putem presupune

$$x+\sqrt{y^2+1}\leq 1\leq y+\sqrt{x^2+1}.$$

Cum $y^2+1\geq 1$, rezultă $x\leq 0$. Îl renotăm pe x cu $-x$. Noul x va fi nenegativ. Vrem să arătăm că $x=y$. Presupunem contrariul. Avem

$$(-x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})=1\Leftrightarrow y+\sqrt{x^2+1}=\frac{x+\sqrt{y^2+1}}{y^2+1-x^2}\quad\Rightarrow$$

$$y^2+1-x^2=\frac{x+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow y^2-x^2=\frac{x+\sqrt{y^2+1}-y-\sqrt{x^2+1}}{y+\sqrt{x^2+1}}\quad\overset{y\neq x}{\Longleftrightarrow}$$

$$y+x=\frac{-1+\dfrac{y+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{x^2+1}}\quad\Leftrightarrow$$

$$y+x=\frac{(x-\sqrt{x^2+1})+(y-\sqrt{y^2+1})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})}<0.$$

Avem, aşadar, $1-\sqrt{x^2+1}\leq y<-x$, adică $0<1+x<\sqrt{1+x^2}$, contradicţie.

Soluţia 2:
Ca mai sus, începem prin a arăta că $x+\sqrt{y^2+1}>0$ şi $y+\sqrt{x^2+1}>0$.
De asemenea, $x,y>0$ implică $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})>1\cdot 1=1$.
• Dacă $x\geq 0\geq y$ şi $x+y\geq 0$, atunci $x\geq -y\geq 0$ implică $x^2\geq y^2$, deci $x+\sqrt{y^2+1}\geq -y+\sqrt{y^2+1}>0$ şi $y+\sqrt{x^2+1}\geq y+\sqrt{y^2+1}>0$. Prin înmulţire obţinem $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})\geq(-y+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, cu egalitate numai dacă $x=-y$. (Analog dacă $y\geq 0\geq x$ şi $x+y\geq 0$.)
• Dacă $x\geq 0\geq y$ şi $x+y\leq 0$, atunci $0\leq x\leq -y$ implică $x^2\leq y^2$, deci $0<x+\sqrt{y^2+1}\leq -y+\sqrt{y^2+1}$ şi $0<y+\sqrt{x^2+1}\leq y+\sqrt{y^2+1}$. Prin înmulţire obţinem $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})\leq(-y+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, cu egalitate numai dacă $x=-y$. (Analog dacă $y\geq 0\geq x$ şi $x+y\leq 0$.)
• Dacă $x,y<0$, putem presupune $y\leq x<0$. Atunci $y^2\geq x^2$, deci avem $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1})\leq\sqrt{y^2+1}(y+\sqrt{y^2+1})<1$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $y(y+\sqrt{y^2+1})<0$. Cum $y<0$ şi $\sqrt{y^2+1}>|y|=-y$, ea arată că acest caz nu este posibil.

Am primit mai multe soluţii pe ideea asta, dar unele au omis să justifice faptul că numerele $x + \sqrt{y^2+1}$ şi $y + \sqrt{x^2+1}$ sunt nenegative, lucru esenţial pentru a putea înmulţi inegalităţi care conţin aceste numere.

Soluţia 3: (*David Anghel*)
Fie $a = \sqrt{x^2+1}$ şi $b = \sqrt{y^2+1}$. Atunci $(x+b)(y+a) = 1 = a^2 - x^2 = b^2 - y^2$.
Din $(x+b)(y+a) = (a-x)(a+x) > 0$ rezultă $\dfrac{x+b}{a+x} = \dfrac{a-x}{a+y}$, deci, scăzând 1, $\dfrac{b-a}{a+x} = -\dfrac{x+y}{a+y}$.
Dacă $x+y \neq 0$, rezultă $\dfrac{b-a}{x+y} = -\dfrac{a+x}{a+y}$. (1)
Analog, din $(x+b)(y+a) = (b-y)(b+y)$ obţinem succesiv $\dfrac{b+y}{a+y} = \dfrac{x+b}{b-y}$, $\dfrac{b-a}{a+y} = \dfrac{x+y}{b-y}$ şi $\dfrac{b-a}{x+y} = \dfrac{a+y}{b-y}$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{a+y}{b-y} + \dfrac{a+x}{a+y} = 0$, adică $a^2+y^2+2ay+ab+bx-ay-xy = 0$, sau $a^2+y^2+(a+x)(b+y) = 2xy$. Cum $a^2+y^2-2xy = 1+x^2+y^2-2xy = 1+(x-y)^2 > 0$, rezultă că $(a+x)(b+y) < 0$.
Dar $a = \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, deci $a+x > 0$. Analog, $b+y > 0$, ceea ce contrazice $(a+x)(b+y) < 0$. Aşadar, presupunerea $x+y \neq 0$ a fost falsă.

Soluţia 4: (*Selim Cadîr*)
Fie $a = \sqrt{x^2+1}$ şi $b = \sqrt{y^2+1}$. Atunci $a^2 - x^2 = 1$, $b^2 - y^2 = 1$.
Din $(a+y)(b+x) = 1$, înmulţind cu $(a-y)(b-x)$ obţinem $(a^2-y^2)(b^2-x^2) = (a-y)(b-x)$, adică $(a-y)(b-x) = (1+x^2-y^2)(1+y^2-x^2) = 1-(x^2-y^2)^2 \leq 1$.
Adunând relaţiile $(a+y)(b+x) = 1$ şi $(a-y)(b-x) \leq 1$ obţinem $2ab + 2xy \leq 2$, adică $0 \leq \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \leq 1 - xy$. Putem ridica la pătrat. Obţinem $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \leq 1 - 2xy + x^2y^2$, adică $(x+y)^2 \leq 0$, de unde concluzia.

Problema a fost pusă în discuţie de *Bogdan Enescu* pe facebook. Iată şi soluţia propusă acolo:

Soluţie: (*Bogdan Enescu*)
a) Să alegem $u, v > 0$ astfel încât $x = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right)$ şi $y = \dfrac{1}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)$. Putem întotdeauna face această alegere, şi încă în mod unic: ecuaţia $u^2 - 2ux - 1 = 0$ are mereu două rădăcini reale, una pozitivă şi una negativă. Cea pozitivă este $u = x + \sqrt{x^2+1}$.
Aşadar, condiţia din enunţ revine la $uv = 1$.

Atunci $x + y = \frac{1}{2}\left(u + v - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2}(u+v)\left(1 - \frac{1}{uv}\right) = 0.$

b) Facem aceeaşi substituţie. Atunci $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$, iar $\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$. Ipoteza revine la

$$\frac{1}{4}\left(u + \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v}\right)\left(v + \frac{1}{v} + u - \frac{1}{u}\right) = 1.$$

Ea se scrie succesiv

$$(u+v)^2 - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)^2 = 4 \iff$$
$$(u+v)^2u^2v^2 - (u-v)^2 - 4u^2v^2 = 0 \iff$$
$$(u+v)^2u^2v^2 - (u-v)^2 - uv[(u+v)^2 - (u-v)^2] = 0 \iff$$
$$(uv-1)[(uv(u+v))^2 + (u-v)^2] = 0.$$

A doua paranteză fiind pozitivă, rămâne că $uv = 1$, ceea ce, am văzut la a), implică $x + y = 0$.

Aceeaşi soluţie la b) a dat-o şi *Dacian Robu.*

Remarcă: (depăşeşte nivelul unui junior)
În spatele acestor substituţii stau funcţiile *sinus hiperbolic* (sinh sau sh) şi *cosinus hiperbolic* (cosh sau ch). Dacă $u = e^a$, $v = e^b$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci

$$x = \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}, \quad y = \sinh(b) = \frac{e^b - e^{-b}}{2},$$
$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \quad \sqrt{1+y^2} = \cosh b = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

Aceste funcţii verifică

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

precum şi alte relaţii (vezi aici) care seamănă cu cele verificate de funcţiile sin şi cos.

Am primit soluţii de la *Vlad Spătaru, David Ghibu, Gabriel Turbincă, David Anghel, Carol Luca Gasan, Albert Romaniuc, Dacian Robu, Ana Duguleanu, Adrian Zanca, Selim Cadîr* şi *Robert Gîdea.*

Problem of the week no. 198
Let $x, y \in \mathbb{R}$. Prove that:
a) if $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$, then $x + y = 0$;
b) if $(x + \sqrt{y^2+1})(y + \sqrt{x^2+1}) = 1$, then $x + y = 0$.

Solution 1: (only for a))
Amplifying with the conjugates, the relation becomes $1 = (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}-y)$. Expanding both the given relation and the previous one gives

$$xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} - x\sqrt{y^2+1} - y\sqrt{x^2+1} = 1$$

and

$$xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = 1.$$

It follows that $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = 0$, hence $x\sqrt{y^2+1} = -y\sqrt{x^2+1}$. This means that x and y have opposite signs and $x^2(y^2+1) = y^2(x^2+1)$, i.e. $x^2 = y^2$, hence $x = -y$.

Solution 2: a) Since $\sqrt{x^2+1} > |x|$, the numbers in the two parentheses are positive. One of them must be at most 1, the other at least 1. Assume $y + \sqrt{y^2+1} \leq 1 \leq x + \sqrt{x^2+1}$. From $\sqrt{y^2+1} \geq 1$ we get $y \leq 0$. On the other hand, $\sqrt{x^2+1} \geq 1 - x$ leads to $x \geq 0$, otherwise $x^2+1 \geq 1 - 2x + x^2$, which is a contradiction. The relation in the statement can be written $x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{(-y)^2+1}$.
If $0 \leq -y < x$ then $x + \sqrt{x^2+1} > -y + \sqrt{(-y)^2+1}$, while if $0 \leq x < -y$, then $x + \sqrt{x^2+1} < -y + \sqrt{(-y)^2+1}$. The only remaining possibility is, thus, $-y = x$ i.e. $x + y = 0$.

b) If $x + \sqrt{y^2+1} < 0$ and $y + \sqrt{x^2+1} < 0$, then $0 < \sqrt{y^2+1} < -x$ and $0 < \sqrt{y^2+1} < -y$, hence $y^2+1 < x^2$ and $y^2 < x^2+1$. Adding these two leads to a contradiction.
Thus, $x + \sqrt{y^2+1} > 0$ and $y + \sqrt{x^2+1} > 0$. One of the two factors will be less than 1 (or both will be equal to 1). Assume

$$x + \sqrt{y^2+1} \leq 1 \leq y + \sqrt{x^2+1}.$$

From $y^2+1 \geq 1$ we get $x \leq 0$. Replace x by $-x$. Our new x will be non-negative. We want to prove that $x = y$. Assume the contrary to be true. In this case

$$(-x + \sqrt{y^2+1})(y + \sqrt{x^2+1}) = 1 \Leftrightarrow y + \sqrt{x^2+1} = \frac{x + \sqrt{y^2+1}}{y^2+1-x^2} \Rightarrow$$

$$y^2+1-x^2 = \frac{x + \sqrt{y^2+1}}{y + \sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow y^2 - x^2 = \frac{x + \sqrt{y^2+1} - y - \sqrt{x^2+1}}{y + \sqrt{x^2+1}} \overset{y \neq x}{\Longleftrightarrow}$$

$$y + x = \frac{-1 + \dfrac{y+x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$y + x = \frac{(x - \sqrt{x^2+1}) + (y - \sqrt{y^2+1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1})(y + \sqrt{x^2+1})} < 0.$$

We have $1-\sqrt{x^2+1} \leq y < -x$, i.e. $0 < 1+x < \sqrt{1+x^2}$, which is a contradiction.

Solution 3: (*Bogdan Enescu*)
a) Choose $u, v > 0$ such that $x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$ and $y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)$. Such a choice is always possible, in a unique way: the quadratic equation $u^2 - 2ux - 1 = 0$ has two roots, one positive, the other negative. The positive one is $u = x + \sqrt{x^2+1}$. Thus, the condition from the statement becomes $uv = 1$.
Then $x + y = \frac{1}{2}\left(u + v - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2}(u+v)\left(1 - \frac{1}{uv}\right) = 0.$

b) We make the same substitution. Then $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$, while $\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$. The given condition translates to

$$\frac{1}{4}\left(u + \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v}\right)\left(v + \frac{1}{v} + u - \frac{1}{u}\right) = 1.$$

This can be written successively

$$(u+v)^2 - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)^2 = 4 \iff$$

$$(u+v)^2u^2v^2 - (u-v)^2 - 4u^2v^2 = 0 \iff$$
$$(u+v)^2u^2v^2 - (u-v)^2 - uv[(u+v)^2 - (u-v)^2] = 0 \iff$$
$$(uv-1)[(uv(u+v))^2 + (u-v)^2] = 0.$$

The second factor being positive, it follows that $uv = 1$, which, as we have seen at a), leads to $x + y = 0$.

Remark: (not for juniors)
Behind these substitutions hide the functions *hyperbolic sine* (sinh) and *hyperbolic cosine* (cosh). If $u = e^a$, $v = e^b$, $a, b \in \mathbb{R}$, then

$$x = \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}, \quad y = \sinh(b) = \frac{e^b - e^{-b}}{2},$$

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \quad \sqrt{1+y^2} = \cosh b = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

These functions satisfy
$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

as well as other formulas (see here) that are similar to the ones satisfied by the functions sin and cos.