Problema săptămânii 201 (15-22 iunie 2020):

Fie ABC un triunghi. Cercul ω_A trece prin A şi este tangent în B la BC. Cercul ω_C trece prin C şi este tangent în B la AB. Cercurile ω_A şi ω_C se intersectează din nou în punctul D. Notăm cu M – mijlocul segmentului $[BC]$; iar cu $\{E\} := MD \cap AC$. Arătaţi că punctul $E \in \omega_A$.

OBSERVAŢII: Întrucît prin ipoteza problemei nu este precizată natura triunghiului ABC, voi începe prin a prezenta nişte triunghiuri particulare în cazul cărora unele dintre punctele care apar în enunţul problemei coincid.

1). Dacă ABC – este un triunghi dreptunghic în B şi $D := pr_{[AC]}(B)$, atunci cercurile ω_A – este cercul având drept diametru cateta $[AB]$ şi cercul ω_B – este cercul având diametru cateta $[BC]$; atunci $D \in \omega_A \cap \omega_B = \{B; D\} \Rightarrow \{E\} = BD \cap [AC] = \{D\} \Leftrightarrow \boxed{E = D}$.

Mai mult, cum: $[MA] \equiv [MB] \equiv [MC] \Rightarrow MD$ – este si ea tangentă la cercul ω_A (v.Fig.1).

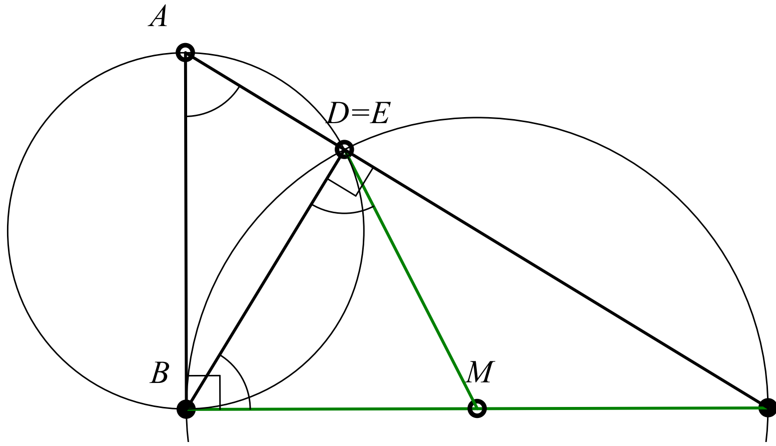

Fig.1.

2). Dacă ABC – este un triunghi isoscel cu vârful în C atunci cercul ω_A este tangent atât la dreapta support a laturii BC, cât şi a laturii $[AC]$ (v.Fig.2). Notând acum cu: $\{D\} := \omega_A \cap \omega_B$ voi redefine punctul M, ca fiind $\{M\} := AD \cap [BC]$ şi voi arăta că punctul M – astfel definit este mijlocul laturii $[BC]$. Într-adevăr, din:

$$\left.\begin{array}{l} [BC] \cap \odot ABD = \{B\} \Rightarrow \underline{\widehat{ABD}} \equiv \widehat{BCD} \\ [AC] \cap \odot ABD = \{A\} \Rightarrow \widehat{CAD} \equiv \underline{\widehat{ABD}} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCD} \equiv \widehat{CAD} \Rightarrow BC \cap \odot ADC = \{C\} \quad (1)$$

şi atunci:

$$\left.\begin{array}{l} BC \cap \odot ABD = \{B\}(ip) \Rightarrow |MB|^2 = \rho_{\odot ABD}(M) = |MA| \cdot |MD| \\ BC \cap \odot ADC = \{C\}\ (1) \Rightarrow |MC|^2 = \rho_{\odot ADC}(M) = |MA| \cdot |MD| \end{array}\right\} \Rightarrow |MB|^2 = |MC|^2 \Leftrightarrow \boxed{[MB] \equiv [MC]}.$$

Aşa că, dreapta MD – care uneşte mijlocul M – al laturii $[BC]$, cu punctul $\{D\} := \omega_A \cap \omega_B$ intersectează în acest caz dreapta AC, în vârful A – al $\Delta ABC \Rightarrow \{E\} := AC \cap \omega_A = \{A\} \Rightarrow \boxed{E = A}$.

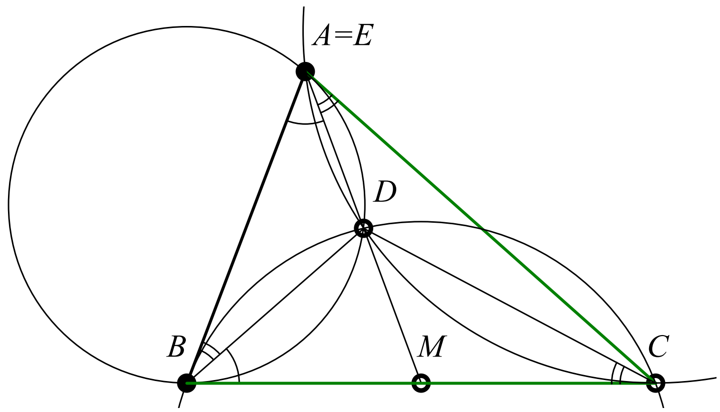

Fig.2.

Voi trece acum la soluţia problemei iniţiale în cazul general, când cercul ω_A – nu este tangent la dreapta AC (deci $[AC]\not\equiv[BC]$, v.Obs.2).

SOLUŢIE, prin redefinirea punctelor E şi M (*Mihai Miculiţa*): Notând acum cu E – cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei AC, cu cercul $\omega_A\left(=\odot ABD\right)$; iar cu $\{M\}:=DE\cap[BC]$, cum $E\in\omega_A\cap AC$, pentru a arăta că punctele E şi M – astfel redefinite, coincid cu punctele purtând acelaşi nume, din ipoteza problemei, este suficient să arătăm că: $[MB]\equiv[MC]$!

Cazul 1: Când $E\in(AC)$ (când: $|AB|>|BC|$) (v.Fig.3), avem:

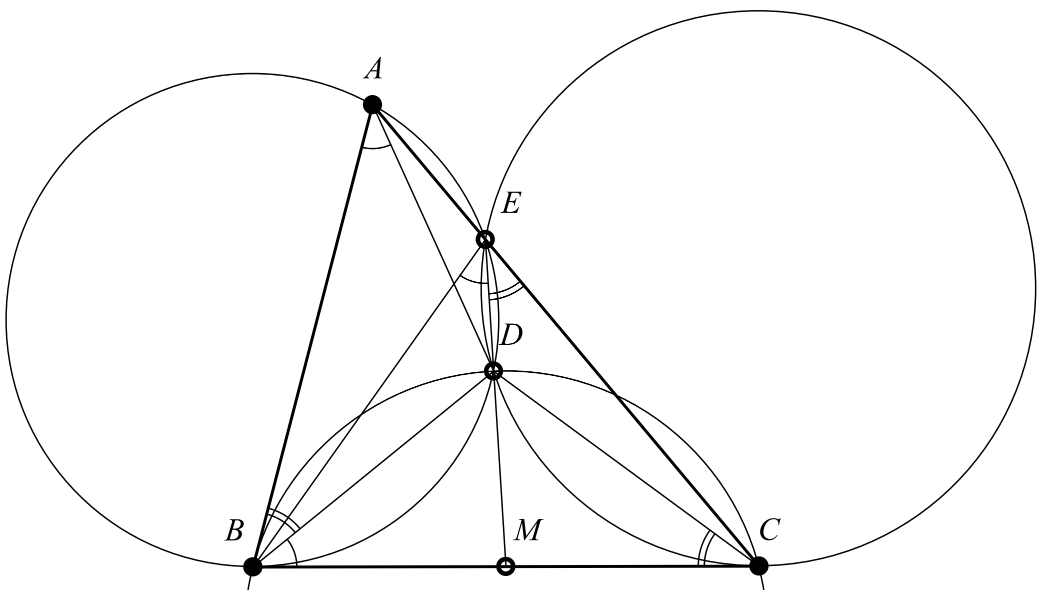

Fig.3.

$$\left.\begin{array}{l} ABDE - inscriptibil \Rightarrow \widehat{CED}\equiv\underline{\widehat{ABD}} \\ AB\cap\odot BCD=\{B\}\Rightarrow\underline{\widehat{ABD}}\equiv\widehat{BCD}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{CED}\equiv\widehat{BCD}\Rightarrow BC\cap\odot CED=\{C\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow|MC|^2=\rho_{\odot CED}(M)=|MD|\cdot|ME| \\ BC\cap\odot ABD=\{B\}\Rightarrow|MB|^2=\rho_{\odot ABD}(M)=|MD|\cdot|ME|\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{|MB|=|MC|}.\ \blacksquare$$

Cazul 2: Când $E \in (AC)$ (când: $|AB|<|BC|$) (v.Fig.4), avem:

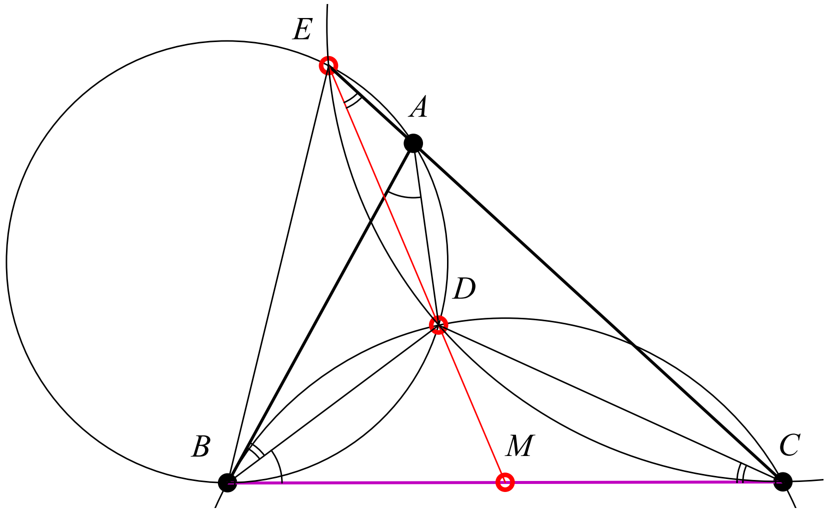

Fig.4.

$$\left.\begin{array}{l} AEBD - inscriptibil \Rightarrow \widehat{CED} \equiv \underline{\widehat{ABD}} \\ AB \cap \odot BCD = \{B\} \Rightarrow \underline{\widehat{ABD}} \equiv \widehat{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CED} \equiv \widehat{BCD} \Rightarrow BC \cap \odot CED = \{C\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow |MC|^2 = \rho_{\odot CED}(M) = |MD| \cdot |ME| \\ BC \cap \odot ABD = \{B\} \Rightarrow |MB|^2 = \rho_{\odot ABD}(M) = |MD| \cdot |ME| \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{|MB| = |MC|}. \blacksquare$$