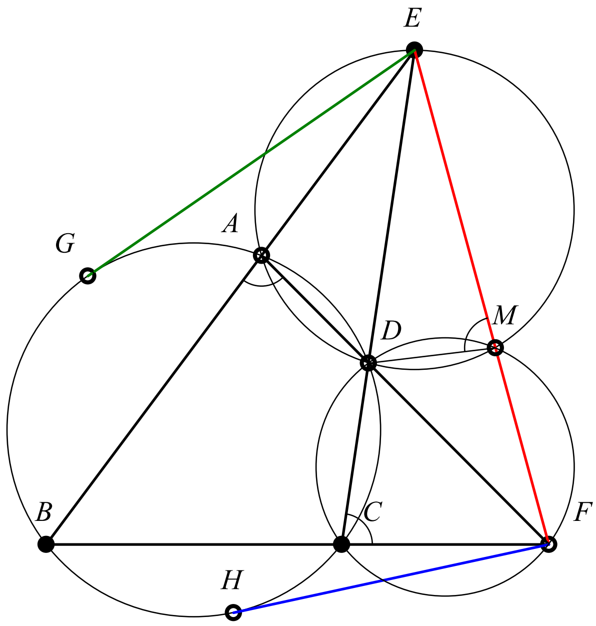
**Problema săptămânii 197**

Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathscr{C}$, $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$. Dacă $EG$ şi $FH$ sunt tangente la cercul $\mathscr{C}$, cu $G, H \in \mathscr{C}$, demonstraţi că $EF$, $EG$ şi $FH$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.




**SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):** Notând cu $M$ – cel de al doilea punct de intersecţie al cercului circumscris triunghiului $EAD$, cu dreapta $EF$ (v.Fig.), avem:

$$\left.\begin{array}{r} ADME-\textit{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{DME} \equiv \underline{\widehat{DAB}} \\ ABCD-\textit{inscriptibil} \Rightarrow \underline{\widehat{DAB}} \equiv \widehat{DCF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DME} \equiv \widehat{DCF} \Leftrightarrow DCFM-\textit{inscriptibil}. \quad (1)$$

În fine, folosind definiţia puterii unui punct faţă de un cerc, avem:

$$\left.\begin{array}{r} EG \cap \odot GCD = \{G\} \Rightarrow |EG|^2 = \rho_{\odot GCD}(E) = \underline{|EC|\cdot|ED|} \\ DCFM-\textit{inscriptibil}\,(1) \Rightarrow \underline{|EC|\cdot|ED|} = \rho_{\odot DCFM}(E) = |EF|\cdot|EM| \end{array}\right\} \Rightarrow |EG|^2 = |EF|\cdot|EM|. \quad (2)$$

În mod analog, din:

$$\left.\begin{array}{r} FH \cap \odot HAB = \{H\} \Rightarrow |FH|^2 = \rho_{\odot HAB}(F) = \underline{|FA|\cdot|FD|} \\ EADM-\textit{inscriptibil}\,(c.a.) \Rightarrow \underline{|FA|\cdot|FD|} = \rho_{\odot EADM}(F) = |FE|\cdot|FM| \end{array}\right\} \Rightarrow |FH|^2 = |EF|\cdot|FM|. \quad (3)$$

În fine, adunând acum relaţiile (2) şi (3), membru cu membru, obţinem, că:

$$\underline{|EG|^2 + |FH|^2} = |EF|\cdot|EM| + |EF|\cdot|FM| = |EF|\cdot\left(|EM| + |MF|\right) = |EF|\cdot|EF| = \underline{|EF|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|EG|^2 + |FH|^2 = |EF|^2}. \blacksquare$$

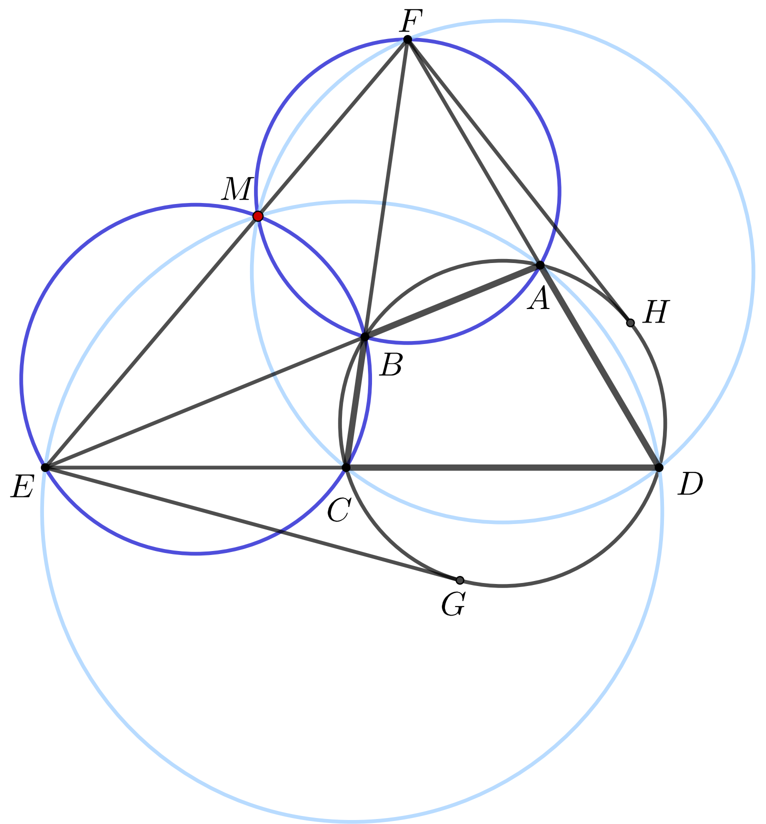
Ce este în spatele acesteia:

**1.** Dacă $ABCD$ este un patrulater, iar $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$, atunci cercurile circumscrise triunghiurilor $ABF$, $CDF$, $BCE$ şi $ADE$ au un punct comun, *punctul lui Miquel* al patrulaterului complet $ABCDEF$.

**2.** Dacă, în plus, patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, acest punct, $M$, se află pe segmentul $[EF]$ (a se vedea, de exemplu, Yufei Zhao, §3).

**3.** Atunci, din puterea punctului, avem imediat

$$EG^2 + FH^2 = EB \cdot EA + FB \cdot FC = EM \cdot EF + FM \cdot FE = EF^2.$$




Am mai primit soluţii de la *Andrei Giovani Chiriţă, David Andrei Anghel, Dacian Robu, Ana Valeria Duguleanu,* şi *Radu Şerban.*

**Problem of the week no. 197**

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, $\mathscr{C}$ its circumcircle $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$. If $EG$ and $FH$ are tangents to the circle $\mathscr{C}$, where $G, H \in \mathscr{C}$, prove that $EF$, $EG$ and $FH$ are the side lengths of a right triangle.

**Solution:**

Assume $B \in (AE)$, $C \in (ED)$, $A \in (FD)$, $B \in (FC)$, as in the picture below. The other cases are similar.

Consider $M$ the second intersection point of the circmcircle of $BEC$ and the line $EF$. It is easy to see that $M$ belongs to the line segment $(EF)$. According to *Miquel's Theorem* applied to triangle $DEF$, the circumcircles of triangles $MEC$, $MAF$ and $DAC$ have a common point (*Miquel's point*), i.e. $A, F, M, B$ are concyclic (which can easily be seen also by directly chasing angles).

From the power of point $E$ with respect to the circumcircles of $ACD$ and $AMF$ we obtain

$$EG^2 = EB \cdot EA = EM \cdot EF \qquad (1).$$

From the power of point $F$ with respect to the circumcircles of $ACD$ and $MEC$ we obtain

$$FH^2 = FB \cdot FC = FM \cdot FE \qquad (2).$$

Adding (1) and (2) leads to $EG^2 + FH^2 = (EM + MF) \cdot EF = EF^2$.