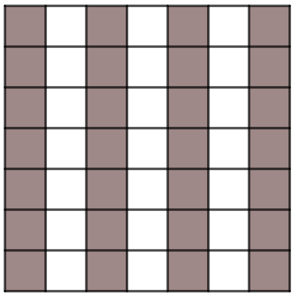
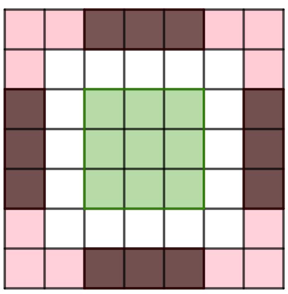
Problema săptămânii 196
Determinaţi cel mai mic număr natural n cu următoarea proprietate:
oricum am colora cu negru n dintre pătrăţelele unitate ale unei table 7×7, există un pătrat 2×2 care conţine cel puţin trei pătrăţele unitate negre.

Soluţia 1: Răspunsul este 29.
Colorând cu negru 28 sau mai puţine pătrăţele, nu este sigur că se obţine un pătrat 2×2 cu cel puţin trei pătraţele negre. De exemplu, colorând cu negru pătrăţelele situate pe coloane impare (sau numai o parte dintre acestea), ca în figura de mai jos, nu avem niciun pătrat 2×2 cu trei pătrăţele negre, deci colorarea a 28 sau mai puţine pătrăţele nu este suficientă, este nevoie să colorăm cel puţin 29 de pătrăţele.



Arătăm acum că, oricum am colora cu negru 29 de pătrăţele, se va forma un pătrat 2×2 cu minim 3 pătrăţele negre. Presupunem contrariul. Atunci în fiecare pătrat 2×2 sunt cel mult două pătrăţele negre. Ne uităm la pătratul 6×6 din colţul din stânga jos. Acesta poate fi împărţit în 9 pătrate 2×2, deci acolo se pot afla cel mult $2 \cdot 9 = 18$ pătrăţele negre. Rămâne că pe rândul de sus, împreună cu coloana cea mai din dreapta se află cel puţin $29 - 18 = 11$ pătrăţele negre. Analog se arată că, în total, pe prima coloană şi ultimul rând sunt minim 11 pătrăţele negre. Chiar presupunând că în partea comună celor două zone, anume în pătrăţelul din colţul din stânga sus şi cel din colţul din dreapta jos am avea pătrăţele negre, pe ansamblul ramei (primul şi ultimul rând, prima şi ultima coloană) vom avea minim 20 de pătrăţele negre. Ne uităm acum la cele patru pătrate 2×2 din colţuri. Fiecare conţine trei pătrăţele care aparţin ramei, însă numai două dintre acestea pot fi negre. Rămâne ca singură posibilitate de a avea 20 de pătrăţele negre pe ramă aceea ca în pătratele 2×2 din colţuri să avem exact două pătrăţele negre pe ramă (al patrulea pătrăţel, cel nesituat pe ramă, va fi atunci alb), iar în restul ramei vom avea numai pătrăţele negre. Lângă acestea (înspre centrul tablei) vom avea în mod obligatoriu pătrăţele albe. Ne aflăm în situaţia de mai jos:



În zona neagră/albă ştim că toate pătrăţelele sunt negre/albe, în zonele roşii sunt câte două pătrăţele negre şi unul alb. Dar pentru a avea 29 de pătrăţele negre, toate pătrăţelele verzi trebuie să fie negre, ceea ce contrazice faptul că nu avem pătrat 2×2 majoritar negru.

Soluţia 2: (*Andrei Giovani Chiriţă*)
Cu aceeaşi colorare ca la Soluţia 1 se arată că trebuie colorate cel puţin 29 de pătrăţele.
Pentru a arăta că 29 de pătrăţele negre sunt întotdeauna suficiente, analizăm din câte pătrate 2×2 face parte fiecare din cele 49 de pătrăţele ale tablei. Astfel, cele patru pătrăţele situate în colţurile tablei fac parte din câte un singur pătrat 2×2, celelalte 20 de pătrăţele din ramă fac parte din câte două pătrate, iar celelalte 25 fac parte din câte 4 pătrate. Notăm cu a numărul pătrăţelelor negre situate în colţuri, cu b numărul pătrăţelelor negre situate în restul ramei, iar cu c numărul pătrăţelelor negre situate în interior. Avem aşadar $a+b+c = 29$. Presupunând că niciunul din cele 36 de pătrate 2×2 nu conţine mai mult de două pătrăţele negre, avem $a + 2b + 4c \leq 72$. E clar că $a \leq 4$. Atunci $b + c \geq 25$. În plus, dacă ne uităm la un colţ şi la cei doi vecini ai săi, numai două dintre aceste trei pătrăţele pot fi negre, deci pe marginea tablei (incluzând aici şi colţurile) putem avea cel mult 20 de pătrăţele negre, adică $a + b \leq 20$. Atunci $c \geq 9$.
Astfel, $72 \geq a + 2b + 4c = (a + b + c) + (b + c) + 2c \geq 29 + 25 + 2 \cdot 9 = 72$, prin urmare trebuie să avem egalitate peste tot, adică $a = 4$, $c = 9$, $b = 16$. Aşadar toată marginea este neagră, cu excepţia unui pătrăţel din fiecare grup format din pătrăţelul din colţ şi cei doi vecini ai săi. Deducem de aici că toate pătrăţelele situate pe marginea pătratului 5×5 din interior sunt albe şi, deoarece $c = 9$, toate cele 9 pătrăţele ale pătratului 3×3 din centru sunt negre, contradicţie.

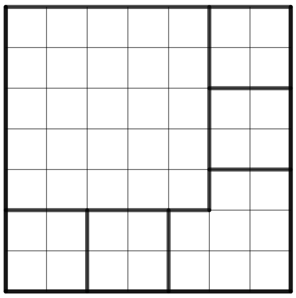
Am folosit aceleaşi idei ca la cele două soluţii de mai sus şi la problema 4, etapa 7, clasa a VII-a de la VO (2019-2020). Găsiţi problema aici
Ca să facem problema de mai sus să semene şi mai tare cu cea de la VO o putem reformula pe aceasta astfel:

Un pătrat 7×7 este împărţit în 49 de pătrăţele mici. În aceste pătrăţele se scriu numere: 20 de 0 şi 29 de 1. Demonstraţi că, indiferent de modul de completare a pătrăţelelor cu numere, există întotdeauna un pătrat 2×2 cu proprietatea că suma celor patru numere din pătrăţelele sale este cel puţin 3.

O altă idee care funcţionează bine este inducţia:

Soluţia 3: (*Gabriel Turbincă, Robert Gîdea*)
Vom demonstra că pentru o tablă $(2n+1) \times (2n+1)$ numărul maxim de pătrăţele care pot fi colorate negru fără a se forma minim un pătrat majoritar negru este $(n + 1)(2n + 1)$. (Cazul din problemă este $n = 3$.) Faptul că atâtea se pot colora se vede dintr-o colorare pe benzi. Arătăm prin inducţie că mai multe nu se pot colora.

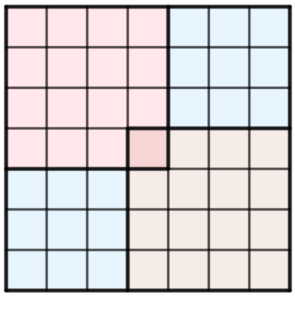
Pentru $n = 1$ afirmaţia este evidentă: 7 pătrăţele negre implică o coloană complet neagră plus cel puţin un pătrăţel negru într-o coloană vecină.
Să presupunem afirmaţia adevărată pentru pătratul $(2n - 1) \times (2n - 1)$ şi să o demonstrăm pentru pătratul $(2n+1)\times(2n+1)$. Împărţim pătratul $(2n+1)\times(2n+1)$ într-un pătrat $(2n - 1) \times (2n - 1)$ (amplasat în stânga sus), $2n - 2$ pătrate 2×2 şi o zonă formată din 8 pătrăţele, situată în colţul din dreapta jos şi având forma unui pătrat 3×3 din care s-a eliminat un colţ (vezi figura în cazul $n = 3$.)



Potrivit ipotezei de inducţie, nu putem plasa în pătratul $(2n - 1) \times (2n - 1)$ mai mult de $n(2n - 1)$ pătrăţele negre. În fiecare din cele $2n - 2$ pătrate 2×2 putem pune maxim 2. În zona din colţul din dreapta jos putem pune maxim 5. Întradevăr, presupunând că am putea pune 6, ar trebui să avem 2 negre în pătratul 2×2 din colţ. Atunci celelalte 4 pătrate din zonă trebuie să fie negre. Dar atunci pătratele de lângă acestea trebuie să fie albe, deci doar pătrăţelul din colţ mai poate fi negru, aşadar nu putem avea 6 pătrăţele negre în respectiva zonă. În concluzie, în pătratul $(2n + 1) \times (2n + 1)$ nu putem avea mai mult de $n(2n - 1) + 2(2n - 2) + 5 = 2n^2 + 3n + 1 = (2n + 1)(n + 1)$ pătrăţele negre fără a se forma un pătrat 2×2 majoritar negru.

Atenţie, inducţia de mai sus nu arată că acest număr este maximul cu această proprietate: am arătat numai că mai mult de atâtea nu pot fi puse. Colorarea pe benzi arată că acest maxim se atinge. Inducţia nu, pentru că nu ne-am uitat la toate pătratele 2×2 ale pătratului $(2n + 1) \times (2n + 1)$.

Soluţia 4: (*David-Andrei Anghel*)
Minimul cerut este 29. Dacă colorăm cu negru 28 (sau mai puţine) pătrate situate pe coloanele 1, 3, 5 şi 7 nu vom avea niciun pătrat 2×2 care să conţină 3 pătrăţele negre.

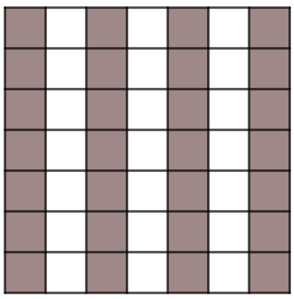


Să arătăm că oricum am colora cu negru 29 dintre pătrăţelele tablei, vom obţine un pătrat 2×2 cu minim trei pătrăţele negre. Împărţim tabla în două pătrate 4×4 (având pătrăţelul din centru comun) şi două pătrate 3×3. Fiecare pătrat 4×4 poate fi împărţit în 4 pătrate 2×2. Dacă vreunul din aceste pătrate conţine 9 sau mai multe pătrăţele negre, vom avea automat un pătrat 2×2 cu minim trei pătrăţele negre. Dacă fiecare din cele două pătrate 4×4 conţine cel mult 8 pătrăţele negre, atunci cele două pătrate 3×3 conţin cel puţin $29 - 2 \cdot 8 = 13$ pătrăţele negre, deci unul dintre ele conţine cel puţin 7. Din principiul cutiei, vom avea atunci măcar o linie cu toate pătrăţelele negre. Această linie are măcar o linie vecină pe care, dacă există un pătrăţel negru, vom avea un pătrat 2×2 cu minim trei pătrăţele negre. Aşadar, această linie trebuie să fie albă, dar atunci avem maxim $3 + 0 + 3 = 6 < 7$ pătrăţele negre, contradicţie.

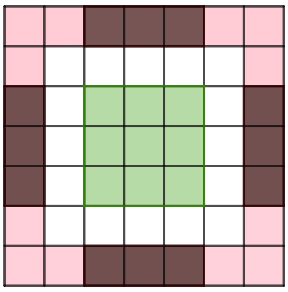
Am mai primit soluţii de la: *Ana Valeria Duguleanu, Selim Cadîr, David Ghibu şi Radu Şerban.*

Problem of the week no. 196
Find the smallest positive integer n with the following property:
after painting black exactly n cells of a 7×7 board, there always exists a 2×2 square with at least three black cells.

Solution 1: The answer is 29.
Painting black 28 or fewer unit squares, it is not certain that a 2×2 square with at least 3 black unit squares occurs. For example, painting black the unit squares situated on odd numbered columns (or only some of these squares), as in the figure below, no 2×2 square contains 3 black squares, therefore painting black 28 of fewer unit squares is not sufficient, we need to paint black at least 29 unit squares.



Next, we prove that no matter how one chooses 29 unit squares and paints them black, there is always a 2×2 square that contains at least 3 black unit squares. Assume the contrary to be true. Then each 2×2 square contains at most two black unit squares. We look at the 6×6 square situated in the bottom left corner. It can be divided into 9 2×2 squares, therefore it can contain at most $2 \cdot 9 = 18$ black unit squares. It follows that the top row and the rightmost column contain, together, at least $29 - 18 = 11$ black squares. Similarly, the bottom row and the leftmost column contain together at least 11 black squares. Even assuming that the common part of these two regions (namely the unit squares in the top left and bottom right corners) is completely black, we have at least 20 black unit squares on the frame. Now we look at the four 2×2 squares in the corners. Each contains three unit squares belonging to the frame, but only two of them can be black. Thus, the only possibility of having 20 black squares on the frame is that each of the four 2×2 squares in the corners contain exactly two black squares from the frame (the fourth unit square, the one not situated on the frame, must be white). The rest of the frame must also be black. Next to these squares (towards the interior of the board) we must have white squares. We find ourselves in the situation below:

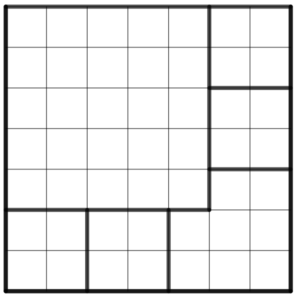


In the black/white zones we know that all the unit squares are black/white; the red zones contain exactly two black and one white unit squares. But in order to have 29 black unit squares, all the squares of the green zone must actually be black, which contradicts the fact that there is no 2×2 square containing more than two black unit squares.

Solution 2: (*Andrei Giovani Chiriţă*)
The same coloring as in Solution 1 shows that one needs to paint black at least 29 unit squares.
To prove that 29 squares are always sufficient, we analyze how many 2×2 squares do contain the various unit squares. We find that the four unit squares situated in the corners are part of one 2×2 square, the other 20 unit squares situated on the frame of the board are part of two 2×2 squares, while the remaining 25 unit squares (situated in the 5×5 central square) are part of four 2×2 squares. We denote by a the number of black squares situated in the corners, by b the numbers of black unit squares situated among the 20 squares that form the rest of the frame, and by c the number of black unit squares situated in the central 5×5 square. Thus, we have $a+b+c=29$. Assuming that none of the 36 existing 2×2 squares does contain more than two black unit squares, we have $a+2b+4c \leq 72$. Clearly $a \leq 4$. Then $b+c \geq 25$. Moreover, if one looks at a unit square situated in one of the corners, and at its two neighboring squares, only two of these three unit squares can be black, therefore the frame (corners included) can have at most 20 black unit squares, i.e. $a+b \leq 20$. This leads to $c \geq 9$.
Thus, $72 \geq a+2b+4c = (a+b+c)+(b+c)+2c \geq 29+25+2 \cdot 9 = 72$, therefore we need to have equality all over, i.e. $a=4$, $c=9$, $b=16$. Thus,

the whole frame is black, with the exception of one unit square in each group of three consisting of the corner and its neighbors. It follows that all the squares situated on the margins of the central 5×5 square are white, and, since $c = 9$, all the 9 unit squares in the central 3×3 square are black, which is a contradiction.

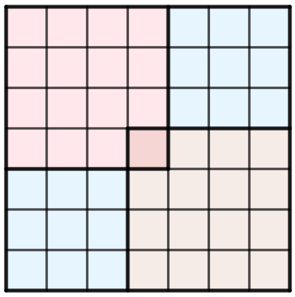
Solution 3: (*Gabriel Turbincă, Robert Gîdea*)
We prove, by induction after n, that for a $(2n+1) \times (2n+1)$ board, the maximum number of blacks for which it is possible that no 2×2 square contains three or more blacks is $(n + 1)(2n + 1)$. (The case in the problem is $n = 3$.) The fact that one can indeed paint black this many unit squares without getting a 2×2 square with more than two blacks can be seen by painting black the unit squares positioned in od numbered columns. We prove by induction that we cannot paint more than that.
For $n = 1$ the statement is obvious: 7 black unit squares means a o column is fully black. Plus, there is a black unit square in the neighboring column to make a 2×2 square with mote than two blacks.
Assume the statement to be true for a $(2n-1) \times (2n-1)$ square,a and let us prove it for a $(2n+1) \times (2n+1)$ square. We split the $(2n+1) \times (2n+1)$ square into one $(2n-1) \times (2n-1)$ square (placed in the upper left corner), $2n-2$ 2×2 squares and one zone consisting of 8 unit squares, situated in the bottom right corner, shaped as a 3×3 square deprived of one corner unit square (see the picture in the case $n = 3$.)



According to inductive hypothesis, we cannot paint black more than $n(2n - 1)$ unit squares of the $(2n - 1) \times (2n - 1)$ square. In each of the $2n - 2$ 2×2 squares we can paint black at most 2 squares. In the zone in the bottom right corner we can paint black at most 5 unit squares. Indeed, assuming we could paint black 6 squares, we would have at most 2 blacks in the 2×2 square in the corner. This means that all the other 4 unit squares of the zone must be black. But then the unit squares neighboring them must be white, so only the unit square in the corner can be black. Therefore we see that one cannot have 6 blacks in the 'zone". In conclusion, in the $(2n+1) \times (2n+1)$ square we cannot have more than $n(2n - 1) + 2(2n - 2) + 5 = 2n^2 + 3n + 1 = (2n + 1)(n + 1)$ black unit squares without having a 2×2 that is mostly black.

Solution 4: (*David-Andrei Anghel*)
The required minimum is 29. Painting black 28 (or less) unit squares situated on

columns 1, 3, 5 and 7, there will be no 2×2 square containg more than two black unit squares.



We show that no matter how we paint black 29 unit squares, we shall always have a 2×2 squares containing at least three black unit squares.
We divide the board into two 4×4 (sharing the central unit square) and two 3×3 squares. Each 4×4 square can be split into four 2×2 squares. If one of them contains 9 of more blacks, we would have a 2×2 square with at least three blacks. If both 4×4 squares contain at most blacks, then the two 3×3 squares contain, together, at least $29 - 2 \cdot 8 = 13$ blacks, therefore one of them contains at least 7. From the Pigeonhole Principle, there is a line containing three blacks. This line hast at least one neighboring line. If this one contains at least one black, there would be a 2×2 squares with at least three blacks. So this line needs to be completely white, but then this 3×3 square would contain at most $3 + 0 + 3 = 6 < 7$ blacks, which is a contradiction.