Problema săptămânii 195
Determinaţi cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1.$$

Soluţie: Deoarece m^2 are aceeaşi paritate ca şi m, deducem că $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ are aceeaşi paritate ca şi $a_1+a_2+\ldots+a_n$, deci aceeaşi paritate ca şi $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$. Deoarece un număr par nu divide unul impar, deducem că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ este impar, deci $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ este multiplu de 8 (pătratul unui număr impar este un număr care dă rest 1 la împărţirea cu 8).
Dacă $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-1 = N(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$, atunci membrul stâng este un număr divizibil cu 8, iar $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ este impar, deci $8 \mid N$. Rezultă că $N \geq 8$. Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (sau cea dintre media aritmetică şi cea pătratică) obţinem că $8(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 1$, deci trebuie ca $n \geq 9$.
Pentru $n = 9$ putem alege $a_1 = a_2 = \ldots = a_7 = 1$, $a_8 = a_9 = 2$ pentru care condiţia din enunţ este îndeplinită:
$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 15$, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 = 120$ şi, evident, $15 \mid 120$ (un alt exemplu: cinci de 1 şi patru de 2).
Aşadar, cel mai mic număr cu proprietatea din enunţ este $n = 9$.

Am primit soluţii de la *David Andrei Anghel, Radu Şerban, Carol Luca Gasan.*

Problem of the week no. 195
Determine the smallest positive integer $n \geq 2$ for which there exist positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1.$$

Solution: Using the fact that m^2 has the same parity as m, we obtain that $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ has the same parity as $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, hence the same parity as $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$. An even number does not divide an odd one, therefore $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ must be odd, which makes $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ a multiple of 8 (the square of an odd integer, $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$ is a number congruent to 1 modulo 8).
If $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 = N(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$, then the number on the left hand side is a multiple of 8, while $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ is odd, so necessarily $8 \mid N$. It follows that $N \geq 8$. From the Cauchy-Schwarz inequality we obtain that $8(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 1$, so we need $n \geq 9$.
For $n = 9$ one can choose $a_1 = a_2 = \ldots = a_7 = 1$, $a_8 = a_9 = 2$ for which the desired condition is satisfied:
$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 15$, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 = 120$ and $15 \mid 120$.
Thus, the smallest positive integer with required property is $n = 9$.