Problema săptămânii 194
Arătaţi că dacă $x, y, z \geq 0$, atunci $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4(xyz - 1)$.

Revista Tzaola

Soluţia 1:
Observăm că avem egalitate pentru $x = y = z = 2$.
Vom aplica inegalitatea mediilor, respectând cazul de egalitate.
Avem $x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 = x^2 + \frac{xy^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + 4 \geq$ $8\sqrt[8]{x^2 \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot 4} = 8\sqrt[8]{\frac{x^8y^8z^8}{2^8}} = 4xyz$, de unde concluzia.
Se vede că egalitate avem numai pentru $x = y = z = 2$.

Soluţia 2:
Vom folosi că $a^2 + 4 \geq 4a, \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad (*)$.
Avem $x^2 + 4 + xy^2 + xyz^2 \overset{(*)}{\geq} 4x + xy^2 + xyz^2 = x(4 + y^2) + xyz^2 \overset{(*)}{\geq} 4xy + xyz^2 = xy(4 + z^2) \overset{(*)}{\geq} 4xyz$.
Egalitate avem dacă $x = 2$, ($y = 2$ sau $x = 0$) şi ($z = 2$ sau $xy = 0$), deci pentru $x = y = z = 2$.

Remarcă (*Titu Zvonaru*)
Deoarece inegalitatea se scrie echivalent $(x-2)^2 + x(y-2)^2 + xy(z-2)^2 \geq 0$, este suficient ca $x, y \geq 0$ (nu este nevoie ca $z \geq 0$).

Am mai primit soluţii de la: *Luca Pană, David Andrei Anghel, Gabriel Turbincă, Marius Valentin Drăgoi, Selim Cadîr, Carol Luca Gasan, Şerban Radu, Radu-Alexandru Vasilescu, Adrian Zanca, Ioana Stănoiu, Robert Gîdea* şi *Ana Valeria Duguleanu* (două soluţii).

Problem of the week no. 194
If $x, y, z \geq 0$, prove that $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4(xyz - 1)$.

Tzaola Journal

Solution 1:
We notice that equality holds when $x = y = z = 2$.
We apply the AM-GM inequality, preserving the equality case.
We have $x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 = x^2 + \frac{xy^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + 4 \geq$ $8\sqrt[8]{x^2 \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot 4} = 8\sqrt[8]{\frac{x^8y^8z^8}{2^8}} = 4xyz$, hence the conclusion.

It is easy to see that the only equality case is $x = y = z = 2$.

Solution 2:
We use that $a^2 + 4 \geq 4a, \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad (*)$.
Thus, $x^2 + 4 + xy^2 + xyz^2 \stackrel{(*)}{\geq} 4x + xy^2 + xyz^2 = x(4 + y^2) + xyz^2 \stackrel{(*)}{\geq} 4xy + xyz^2 = xy(4 + z^2) \stackrel{(*)}{\geq} 4xyz$.
Equality holds when $x = 2$, ($y = 2$ or $x = 0$) and ($z = 2$ or $xy = 0$), i.e. for $x = y = z = 2$.