

Problema 1. Aflați numărul natural n pentru care există exact 1001 perechi (a, b) de numere întregi astfel încât

$$\frac{ab}{a+b} = 2^n.$$

Problema 2. Vasile are o expresie numerică de forma

$$_ \times _ + _ \times _$$

și patru cartonașe cu câte un număr pe care le poate pune în cele patru locuri libere (marcate cu „ $_$ ”) în expresia dată.

Vasile a încercat toate modalitățile posibile de a completa cele patru locuri libere și a obținut de fiecare dată același rezultat. Demonstrați că numerele scrise pe trei dintre cartonașele sale sunt egale.

Problema 3. Patrulateralele $ABCP$ și $A'B'C'P'$ sunt înscrise în două cercuri concenrice. Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt echilaterale, demonstrați că

$$P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = PA'^2 + PB'^2 + PC'^2.$$

Problema 4. Un pătrat 7×7 este împărțit în 49 de pătrățele mici. În aceste pătrățele se scriu numerele de la 1 la 49. Demonstrați că, indiferent de modul de completare a pătrățelelor cu numere, există întotdeauna un pătrat 2×2 cu proprietatea că suma celor patru numere din pătrățelele sale este cel puțin 81.