TEOREMA FLUTURELUI

Teoremă. Fie $\mathscr{C}$ un cerc şi $[AB]$ o coardă cu mijlocul M. $[CD]$ şi $[EF]$ sunt două coarte arbitrare care trec prin M astfel încât C şi E sunt de aceeşi parte a lui AB. Dacă $\{P\} = CF \cap AB$ şi $\{Q\} = DE \cap AB$, atunci M este mijlocul lui $[PQ]$.

Demonstraţie:

Fie O centrul cercului, R mijlocul lui $[CF]$, S mijlocul lui $[DE]$. Atunci $OMPR$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle OPM \equiv \sphericalangle ORM$. Analog, $\sphericalangle OQM \equiv \sphericalangle OSM$.
Avem că M este mijlocul lui $[PQ] \Leftrightarrow OP = OQ \Leftrightarrow \sphericalangle OPM \equiv \sphericalangle OQM \Leftrightarrow \sphericalangle ORM \equiv \sphericalangle OSM \Leftrightarrow \sphericalangle MRF \equiv \sphericalangle MSD$.
Ori, cum $CEDF$ este inscriptibil, triunghiurile CMF şi EMD sunt asemenea, deci şi triunghiurile MRF şi MSD sunt asemenea, deci $\sphericalangle MRF \equiv \sphericalangle MSD$ şi concluzia.

Consecinţă.
Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $AC \cap BD = \{E\}$, O centrul cercului circumscris patulaterului $ABCD$ şi d o dreaptă care trece prin E. Dacă $d \cap AB = \{M\}$ şi $d \cap CD = \{N\}$, atunci $OE \perp MN$ dacă şi numai dacă E este mijlocul lui MN.

Aplicaţii.

1. Fie H ortocentrul unui triunghi ascuţitunghic ABC şi M mijlocul laturii $[BC]$. Perpendiculara dusă prin H pe dreapta MH intersectează dreptele AB şi AC în punctele P şi Q. Arătaţi că punctul H este mijlocul segmentului $[PQ]$.

2. Fie D mijlocul bazei $[AB]$ a unui triunghi isoscel ascuţitunghic ABC, E un punct oarecare pe AB, iar O centrul cercului circumscris triunghiului ACE. Demonstraţi că perpendiculara în D pe OD, perpendiculara din E pe BC şi paralela prin B la AC sunt concurente.

3. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC intersectează BC în X. Fie d o dreaptă care trece prin X şi este perpendiculară pe OX, iar $\{Y\} = d \cap AC$, $\{Z\} = d \cap AB$. Demonstraţi că X este mijlocul lui YZ.

Comentariu. Problema rezultă imediat din Consecinţa de mai sus, dar care este cel de-al patrulea punct? Tangenta în A trebuie percepută ca o coardă AA.

4. În triunghiul ABC cu $AC > BC$, F este piciorul înălţimii din C, P este simetricul lui A faţă de F, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Dacă $\{X\} = HP \cap BC$, demonstraţi că $OF \perp FX$.

Seamănă cu următoarea problemă de la BMO 2008:
Se dă un triunghi scalen ABC cu $AC > BC$. Fie F piciorul înălţimii din C şi P un punct pe AB diferit de A astfel încât $AF = PF$. Fie H, O, M ortocentrul, centrul cercului circumscris, respectiv mijlocul lui $[AC]$ (ale triunghiului ABC). Fie X intersecţia lui BC cu HP. Fie Y intersecţia dintre OM şi FX şi OF intersectează AC în Z. Demonstrati ca F, M, Y, Z sunt conciclice.

5. În triunghiul ABC cu $AC > AB$, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Dacă $D \in (BC)$ este piciorul înălţimii din A, iar perpendiculara în D pe OD intersectează AB în K, demonstraţi că $\sphericalangle DHK \equiv \sphericalangle ABC$.

6. Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui (BC), $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel ca $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Tangentele în E şi F la cercul de diametru $[AD]$ se intersectează în T. Arătaţi că $BT = CT$.

Comentariu. O soluţie fără Teorema fluturelui poate fi dată cu teorema cosinusului, arii şi calcule trigonometrice laborioase.

7. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, $[AA']$, $[CC']$ sunt înălţimi, $\{H\} = AA' \cap CC'$, iar $L \in (AC)$ astfel încât $(A'L)$ este înjumătăţit de CC', iar $(C'L)$ este înjumătăţit de AA'. Arătaţi că $HL \perp HO$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Comentariu. O schiţă de soluţie fără Teorema fluturelui: OL şi HL se obţin din relaţia lui Stewart, iar OH cu relaţia lui Leibniz. Concluzia rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora, folosind formula $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.