Programul upper.school
de pregătire pentru JBMO
Curs 32 - Omotetie

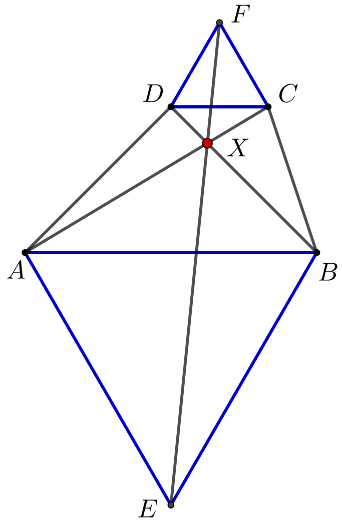
Andrei Eckstein

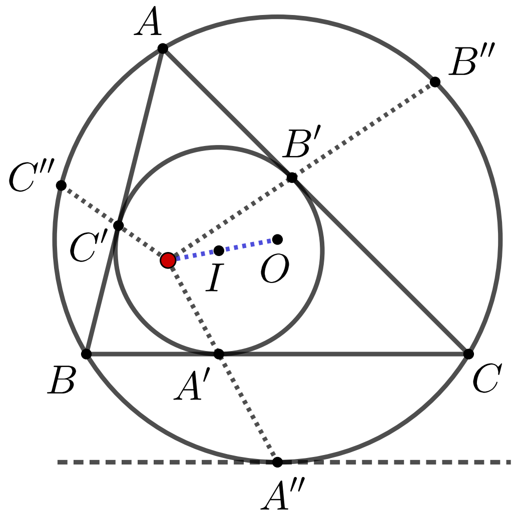
§1 Temă

Problema 1.1

Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$. În exteriorul acestuia se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi CDF. Dacă X este punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului, demonstraţi că punctele E, X, F sunt coliniare.

Demonstraţie. Omotetia inversă de centru X şi raport $\frac{CD}{AB}$ duce A în C, B în D şi triunghiul echilateral ABC într-un triunghi echilateral. Cum una din laturile acestuia este $[CD]$, rezultă că omotetia noastră duce triunghiul ABE în triunghiul CDF şi, în particular, punctul E în punctul F.
Aşadar, punctele E, X, F sunt coliniare. □





Problema 1.2

Fie ABC un triunghi şi A', B', C' punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Fie A'' mijlocul arcului BC care nu-l conţine pe A al cercului circumscris triunghiului ABC. Analog se definesc punctele B'' şi C''. Demonstraţi că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

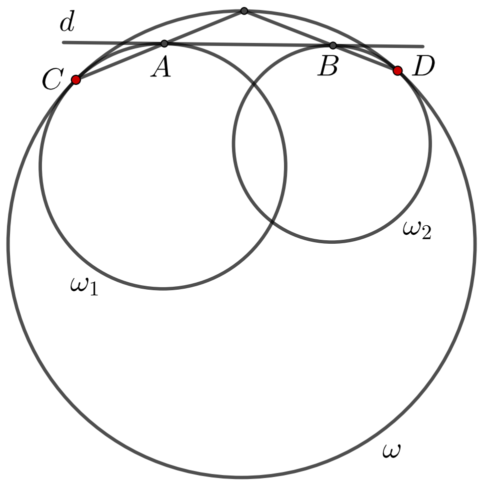
Olimpiadă Ungaria, 1998

Demonstrație. Omotetia directă care duce cercul înscris în cel circumscris duce punctul A' în acel punct de pe arcul BC care nu-l conţine pe A în care tangenta la cercul circumscris este paralelă la BC. Acest punct este tocmai punctul A'', mijlocul arcului BC. Aşadar, triunghiurile $A'B'C'$ şi $A''B''C''$ sunt omotetice. Ele nu sunt congruente (razele cercurilor lor circumscrise nu sunt egale), deci dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente în centrul de omotetie. □

Problema 1.3

Fie d o dreaptă. Cercurile ω_1 şi ω_2 sunt tangente dreptei d în punctele A, respectiv B, şi se află de aceeaşi parte a dreptei d. Cercul ω este tangent exterior cercurilor ω_1 şi ω_2 în punctele C, respectiv D. Demonstraţi că dreptele AC şi BD se intersectează într-un punct al cercului ω.

Demonstrație. Omotetia directă care duce cercul ω_1 în cercul ω are centrul în C. Ea duce punctul A în acel punct al cercului ω (mai precis al arcului CD care intersectează dreapta d) în care tangenta la ω este paralelă cu d.
Analog, omotetia directă care duce cercul ω_2 în cercul ω are centrul în D şi duce punctul B în acel punct al cercului ω în care tangenta la ω este paralelă cu d. Aşadar, dreptele AC şi BD reintersectează cercul ω în acelaşi punct. □

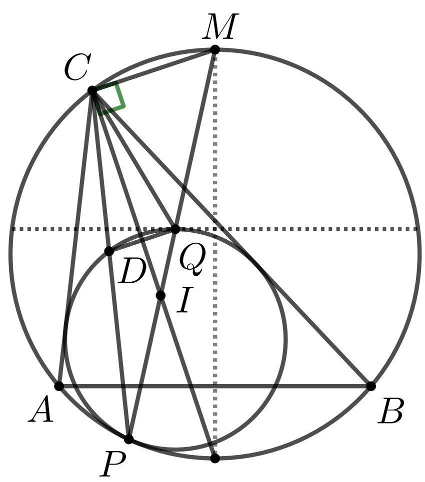


Problema 1.4 (Problemă selectată pentru evaluare)

Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC. Cercul ω este tangent laturilor AC şi BC, şi este tangent interior cercului Ω în punctul P. O dreaptă paralelă cu AB şi care intersectează interiorul triunghiului ABC este tangentă cercului ω în punctul Q. Demonstraţi că unghiurile $\sphericalangle ACP$ şi $\sphericalangle QCB$ sunt congruente.

EGMO 2013

Demonstrație. Fie M mijlocul arcului AB care conţine punctul C („polul nord" al cercului circumscris), I centrul cercului înscris şi $\{D\} = CP \cap \omega$. Omotetia de centru P care duce cercul ω în cercul Ω, va duce punctul Q în punctul de pe Ω în care tangenta este paralelă cu AB, adică în punctul M. Aşadar, punctele P, M, Q sunt coliniare. Mai mult, conform problemei 2.12 din materialul teoretic, $I \in PM$. Aceeaşi omotetie îl duce pe D în C.



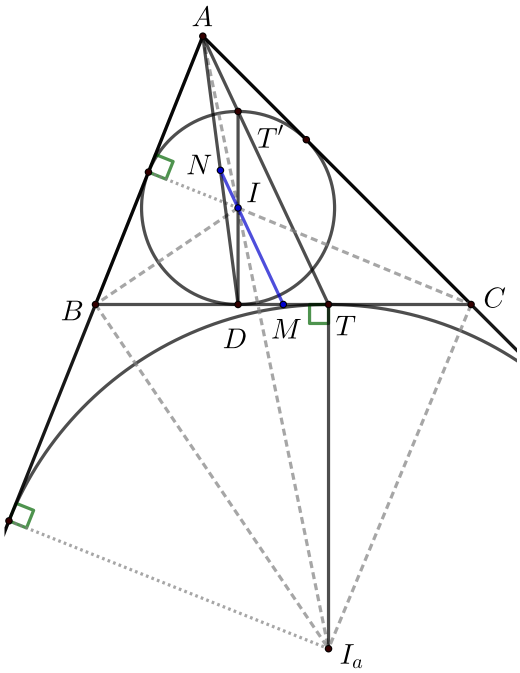
Ştim că $(CI$ intersectează Ω în mijlocul arcului AB care nu conţine punctul C, adică în punctul diametral opus lui M, prin urmare $m(\sphericalangle MCI) = 90°$. Deoarece $DQ \parallel CM$ (din omotetie), deducem că $CI \perp DQ$. Cum I se află pe mediatoarea lui $[DQ]$ rezultă că şi C este pe mediatoarea lui $[DQ]$, de unde concluzia. □

Soluţiile oficiale le găsiţi aici.

Problema 1.5

Fie ABC un triunghi şi M mijlocul laturii $[BC]$. Cercul înscris are centrul în I şi este tangent laturii BC în punctul D. Fie N mijlocul lui $[AD]$. Demonstraţi că punctele N, I şi M sunt coliniare.

Demonstraţie. Fie T punctul de tangenţă a cercului A-exînscris cu latura BC.
Se ştie că T este simetricul lui D faţă de M.
De asemenea se ştie (vezi problema 2.8 din materialul teoretic) că AT intersectează cercul înscris în punctul T', diametral opus lui D în cercul înscris. Atunci punctele M, I, N se află, toate, pe linia mijlocie a triunghiului ADT, prin urmare sunt coliniare (omotetia directă de centru D şi raport $\frac{1}{2}$ duce punctele coliniare A, T', T în punctele N, I, M, prin urmare acestea sunt coliniare). □

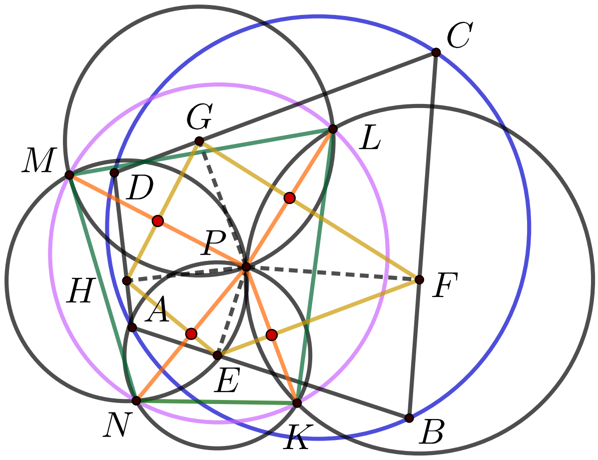


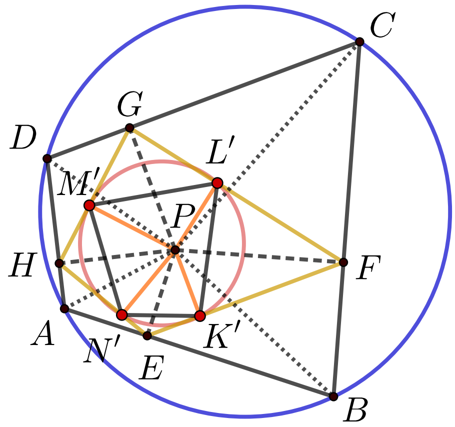
Problema 1.6

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi P un punct în interiorul acestuia. Fie E, F, G, H proiecţiile punctului P pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Cercurile cu centrele în E şi F care trec prin P se taie a doua oară în K. Cercurile cu centrele în F şi G care trec prin P se taie a doua oară în L. Cercurile cu centrele în G şi H care trec prin P se taie a doua oară în M. Cercurile cu centrele în H şi E care trec prin P se taie a doua oară în N. Demonstraţi că punctele K, L, M, N sunt conciclice.

Van Khea

Demonstraţie. Dacă notăm cu $\{K'\} = PK \cap EF$, $\{L'\} = PL \cap FG$, $\{M'\} = PM \cap GH$ şi $\{N'\} = PN \cap HE$, atunci aceste puncte sunt mijloacele segmentelor $[PK]$, $[PL]$, $[PM]$, respectiv $[PN]$. Onotetia directă de centru P şi raport $\frac{1}{2}$ duce $KLMN$ în $K'L'M'N'$, deci concluzia este echivalentă cu a arăta că patrulaterul $K'L'M'N'$ este inscriptibil.
Ştim că $PK' \perp EF$, $PL' \perp FG$, $PM' \perp GH$ şi $PN' \perp HE$. Atunci $\sphericalangle PK'L' \equiv \sphericalangle PFL' \equiv \sphericalangle PCD$ şi $\sphericalangle PK'N' \equiv \sphericalangle PEH \equiv \sphericalangle PAD$, Analog, $\sphericalangle PM'L' \equiv \sphericalangle PCB$ şi $\sphericalangle PM'N' \equiv \sphericalangle PAB$, deci $m(\sphericalangle N'K'L') + m(\sphericalangle L'M'N') = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle BCD) = 180°$, de unde concluzia. □



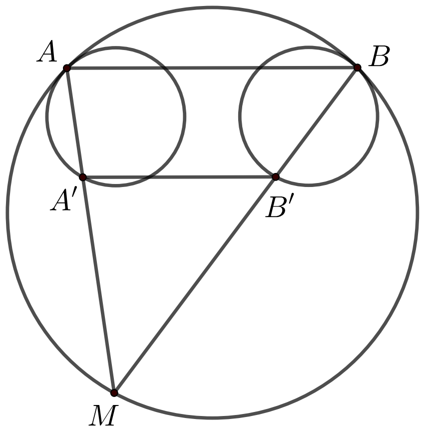


Problema 1.7

Două cercuri congruente sunt tangente interior unui cerc mai mare în punctele A şi B. Fie M un punct pe cercul mare. Dacă MA şi MB intersectează cercurile mai mici corespunzătoare în A' şi B', demonstraţi că $A'B'$ este paralelă cu AB.

Israel, Joseph Gillis Mathematical Olympiad, 1997

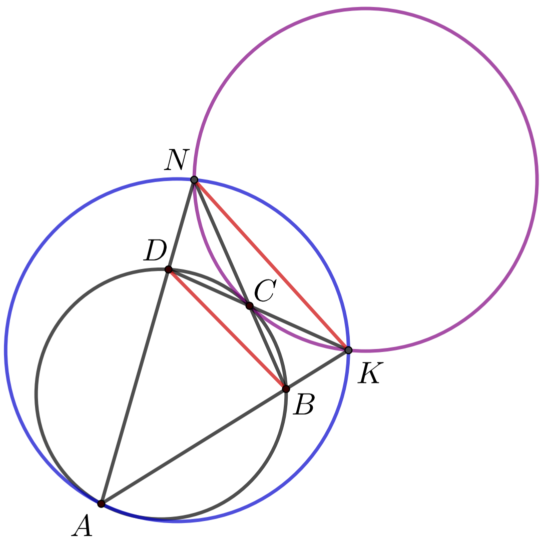
Demonstraţie. Fie r raza cercurilor mici şi R raza cercului mare.
Omotetiile directe care duc cercurile mici în cercul mare au centrele în A, respectiv B. Raportul celor două omotetii este $\frac{R}{r}$.
Deoarece aceste două omotetii duc A' în M, respectiv B' în M, avem $\frac{AM}{AA'} = \frac{R}{r} = \frac{BM}{BB'}$, deci $A'B' \parallel AB$. □

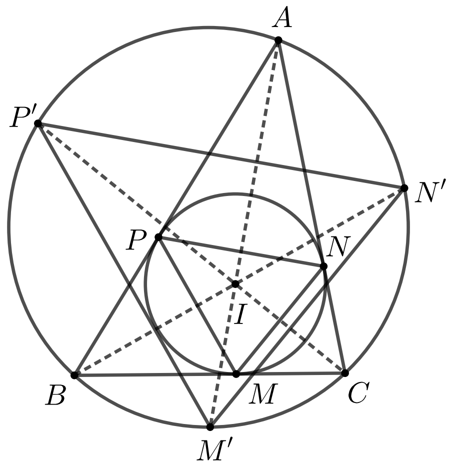


Problema 1.8

Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul ω, $\{K\} = AB \cap CD$, $\{N\} = AD \cap BC$. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului AKN este tangent cercului ω dacă şi numai dacă cercul circumscris triunghiului CKN este tangent cercului ω.

Demonstraţie. Cercul circumscris triunghiului AKN este tangent cercului ω (în punctul A) dacă şi numai dacă omotetia de centru A care duce D în N îl duce şi pe B în K, adică dacă şi numai dacă $BD \parallel NK$.
Analog, cercul circumscris triunghiului CKN este tangent cercului ω (în punctul C) dacă şi numai dacă omotetia de centru C care duce D în K îl duce şi pe B în N, adică dacă şi numai dacă $BD \parallel NK$.
Concluzia se impune. □





Problema 1.9

Fie ABC un triunghi, O şi I centrul cercului circumscris, respectiv înscris în triunghi, iar M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Dacă H' este ortocentrul triunghiului MNP, arătaţi că punctele O, I şi H' sunt coliniare.

Olimpiadă Iran, 1995

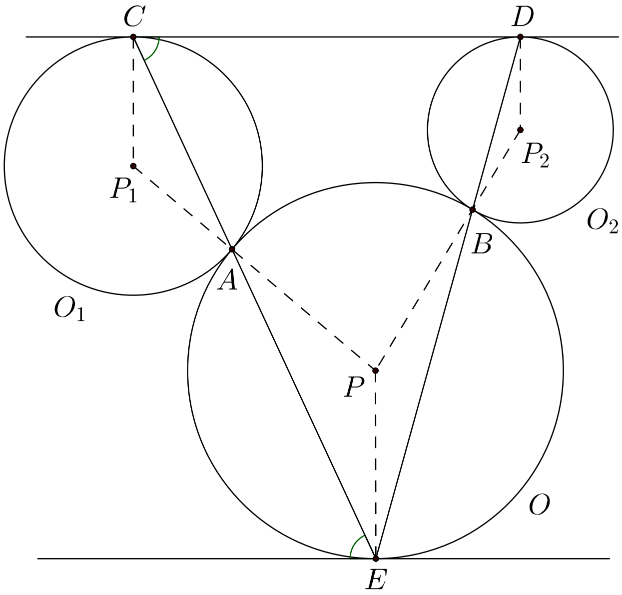
Demonstraţie. Fie M', N', P' punctele în care bisectoarele $(AI$, $(BI$, respectiv $(CI$ ale triunghiului ABC intersectează cercul circumscris acestuia. Este uşor de văzut că $AM' \perp N'P'$ şi analoagele, deci $N'P' \parallel NP$ şi analoagele. Deducem că triunghiurile $M'N'P'$ şi MNP sunt omotetice. Fie K centrul acestei omotetii. Deoarece I este ortocentrul triunghiului $M'N'P'$, punctele K, I şi H' sunt coliniare (omotetia noastră duce ortocentru în ortocentru). Pe de altă parte, I este centrul cercului circumscris triunghiului MNP, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului $M'N'P'$. Omotetia noastră duce centrul cercului circumscris în centrul cercului circumscris, deci punctele K, O şi I sunt coliniare. Deducem că punctele O, I şi H' sunt coliniare. □

Problema 1.10 (Teorema Mickey Mouse)

Fie O_1 şi O_2 două cercuri tangente exterior unui cerc O, punctele de tangenţă fiind A, respectiv B. Fie C şi D puncte pe O_1, respectiv O_2 astfel încât dreapta CD este o tangentă comună exterioară a celor două cercuri. Dacă $\{E\} = AC \cap BD$, atunci $E \in O$ şi tangenta în E la O este paralelă cu CD.

Demonstraţie. Să notăm cu R_1, R_2 şi R razele cercurilor O_1, O_2, respectiv O. Omotetia inversă de raport $\dfrac{R_1}{R}$, dintre cercurile O_1 şi O are centrul în A şi duce punctul C într-un punct E_1. Tangenta în C la O_1 (adică CD) este dusă prin această omotetie într-o dreaptă paralelă cu CD, tangentă la O în E_1. Analog, omotetia inversă de raport $\dfrac{R_2}{R}$, dintre cercurile O_1 şi O are centrul în B şi duce punctul D într-un punct E_2. Tangenta în D la O_2, CD, este dusă prin această omotetie într-o dreaptă paralelă cu CD, tangentă la O în E_2. De aici rezultă că E_1 coincide cu E_2.

Şi mai scurt: dacă ne aranjăm ca tangenta CD să fie „orizontală", iar punctele C şi D să fie „polurile nord” ale cercurilor O_1 şi O_2, cele două omotetii duc aceste puncte în „polul sud” al cercului O (în care tangenta este tot orizontală).



□

Remarcă.
Din cele de mai sus rezultă uşor că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil şi de aici că E este pe axa radicală a cercurilor O_1 şi O_2.

(vezi problema săptămânii 1)