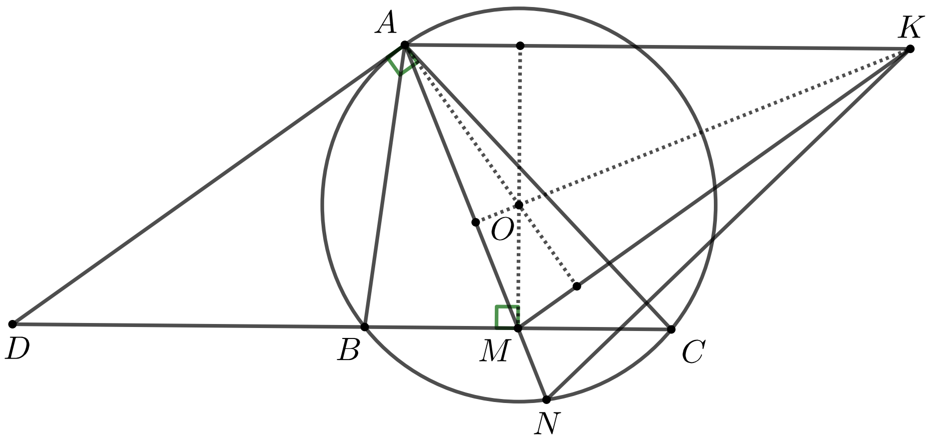
Problema săptămânii 193

Fie ABC un triunghi scalen înscris în cercul ω. Tangenta în A la ω intersectează BC în D. Fie M mijlocul laturii $[BC]$, $\{N\} = (AM \cap \omega$ şi punctul K astfel încât $ADMK$ este paralelogram. Demonstraţi că $KA = KN$.

Alexandru Lopotenco (Concursul IMEO, 2019)

Soluţia 1: (*David Andrei Anghel, Selim Cadîr*)

Fie O centrul cercului ω. Atunci $OM \perp BC$ şi $AK \parallel BC$ implică $OM \perp AK$. Similar, $OA \perp AD$ şi $AD \parallel MK$ implică $OA \perp MK$. Rezultă că O este ortocentrul triunghiului AMK, deci $KO \perp AM$. Cum O se află pe mediatoarea segmentului $[AN]$, deducem că şi K se află pe această mediatoare, deci $KA = KN$.

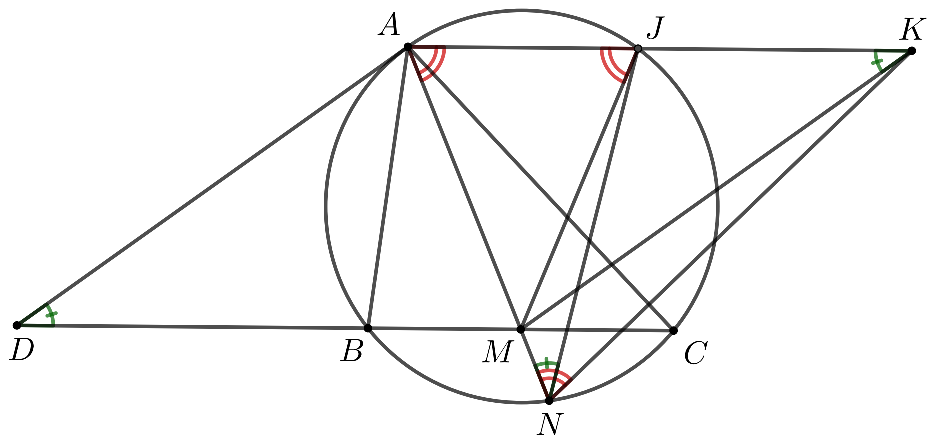


Soluţia 2: (*Gabriel Turbincă*)

Presupunem $AB < AC$, celălalt caz fiind analog. Fie $\{J\} = (AK \cap \omega$.
Atunci $ABCJ$ este trapez isoscel (sau dreptunghi) şi

$$m(\sphericalangle AKC) = m(\sphericalangle ADM) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} - \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{m(\widehat{BJ})}{2} - \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\sphericalangle ANJ).$$

Rezultă că patrulaterul $MNKJ$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle ANK \equiv \sphericalangle AJM \equiv \sphericalangle KAM$, de unde concluzia.



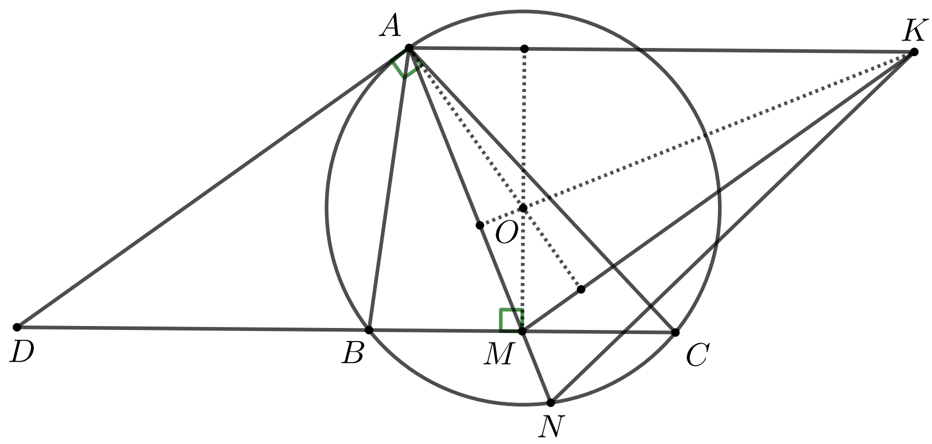
ALte soluţii puteţi vedea pe AoPS.

Am mai primit soluţii de la: *Dacian Robu, Ana Valeria Duguleanu* şi *Radu Şerban.*

Problem of the week no. 193
Let ABC be a scalene triangle with circumcircle ω. The tangent to ω at A meets BC at D. The A-median of triangle ABC intersects BC and ω at M and N, respectively. Suppose that K is a point such that $ADMK$ is a parallelogram. Prove that $KA = KN$.

Alexandru Lopotenco (IMEO, 2019)

Solution: (*David Andrei Anghel, Selim Cadîr*)
Let O be the center of ω. Then $OM \perp BC$ and $AK \parallel BC$ imply $OM \perp AK$. Similarly, $OA \perp AD$ and $AD \parallel MK$ lead to $OA \perp MK$. It follows that O is the orthocenter of triangle AMK, hence $KO \perp AM$. As O is on the perpendicular bisector of $[AN]$, we deduce that K also lies on the perpendicular bisector of $[AN]$, which means that $KA = KN$.



Other solutions can be found on AoPS.