Problema săptămânii 192
2019 numere naturale nenule sunt scrise pe un cerc. Se ştie că diferenţa dintre oricare două numere vecine pe cerc este egală cu cel mai mare divizor comun al acestora. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a unui număr n care divide produsul numerelor de pe cerc oricare ar fi alegerea acestora.

Turneul Oraşelor, 2015

Soluţie: Vom arăta că cel mai mare n care divide întotdeauna produsul numerelor de pe cerc este $2^{1011} \cdot 3$.
Mai întâi demonstrăm că acest număr divide produsul numerelor de pe cerc.
Nu putem avea două numere impare vecine pe cerc deoarece diferenţa lor ar fi pară, în timp de cmmdc-ul impar. Aşadar, pe cerc sunt cel puţin 1010 numere pare, în particular vor exista două numere pare vecine. Presupunând că niciunul dintre aceste două numere nu este multiplu de 4, ar rezulta că diferenţa lor este divizibilă cu 4 în timp ce cmmdc-ul lor nu. Contradicţia obţinută arată că produsul numerelor de pe cerc este divizibil cu 2^{2011}.
Presupunând că produsul n-ar fi divizibil cu 3, numerele de pe cerc ar trebui să dea, toate, fie restul 1, fie restul 2 la împărţirea cu 3. Având un număr impar de numere pe cerc, resturile nu pot alterna, deci vor fi două numere vecine pe cerc care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3. Dar atunci diferenţa lor este multiplu de 3, în timp ce cmmdc-ul nu. Această contradicţie arată că trebuie să existe un multiplu de 3 pe cerc, deci produsul numerelor de pe cerc este întotdeauna divizibil cu $2^{1011}\cdot 3$.

Scriind pe cerc numerele $2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, 2, 3, 4$ care respectă condiţiile din enunţ şi au produsul exact $2^{1011} \cdot 3$, se vede că divizorul maxim al produsului numerelor de pe cerc nu depăşeşte $2^{2011} \cdot 3$.

Am primit soluţii de la: *Andrei Giovani Chiriţă, David Andrei Anghel, Carol Luca Gasan, Radu Şerban, Ana Valeria Duguleanu, Selim Cadîr* şi *Radu-Alexandru Vasilescu.*

Problem of the week no. 192
2019 positive integers are written on a circle. The difference between any two adjacent numbers is equal to their greatest common divisor. Determine the maximal value of n which divides the product of the 2019 numbers regardless of their choice.

Tournament of Towns, 2015

Solution: It is easy to adapt the solution of problem 5 from here.