Problema săptămânii 191
Aflaţi numerele naturale n pentru care $5^{2n+1} - 5^n + 1$ este pătrat perfect.

test Arabia Saudită, 2014

Soluţia 1: Dacă $5^{2n+1} - 5^n + 1 = k^2$ cu $k \in \mathbb{N}$, atunci k este impar şi avem $5^n(5^{n+1} - 1) = (k-1)(k+1)$. Cum $k-1$ şi $k+1$ sunt numere pare consecutive, cel mai mare divizor comun al lor este 2, deci cele două numere trebuie să fie $2 \cdot 5^n$ şi $\dfrac{5^{n+1}-1}{2}$. Într-adevăr, $n = 0$ nu convine, iar $n \geq 1$ implică $k \geq 11$. Atunci $\dfrac{k+1}{k-1} = 1 + \dfrac{2}{k-1} \leq 1 + \dfrac{2}{10} = \dfrac{6}{5}$. Dacă $k-1$ şi $k+1$ ar fi $5^n \cdot 2p$ şi $\dfrac{5^{n+1}-1}{2p}$, cu $p \geq 2$, atunci raportul lor ar fi $\dfrac{5^n \cdot 4p^2}{5^{n+1}-1} > \dfrac{4p^2}{5} \geq \dfrac{16}{5} > \dfrac{6}{5}$.
Mai mult, cum $2 \cdot 5^n < \dfrac{5^{n+1}-1}{2}$, trebuie să avem $k - 1 = 2 \cdot 5^n$ şi $k+1 = \dfrac{5^{n+1}-1}{2}$.
Prin scădere obţinem că $\dfrac{5^{n+1}-1}{2} - 2 \cdot 5^n = 2$, de unde rezultă imediat că $n = 1$.
Reciproc, pentru $n = 1$, numărul $5^{2n+1} - 5^n + 1 = 121 = 11^2$ este într-adevăr pătrat perfect, deci $n = 1$ este singura soluţie a problemei.

Soluţia 2: Ca mai sus se ajunge la $5^n(5^{n+1} - 1) = (k-1)(k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Cum $(k+1) - (k-1) = 2$, 5 nu poate să dividă ambii factori, deci fie $5^n \mid k-1$, fie $5^n \mid k+1$.
- Dacă $5^n \mid k-1$, adică $k = 5^n \cdot a + 1$, atunci relaţia de mai sus revine la $5^n(5^{n+1} - 1) = 5^n a(5^n a + 2)$, adică la $5^n(5 - a^2) = 2a + 1$. Deducem că $a^2 < 5$. Pentru $a = 1$ nu obţinem soluţie, iar pentru $a = 2$ obţinem $n = 1$.
- Dacă $5^n \mid k+1$, adică $k = 5^n \cdot a - 1$, atunci relaţia de mai sus revine la $5^n(5^{n+1} - 1) = (5^n a - 2) \cdot 5^n a$, adică la $5^n(a^2 - 5) = 2a - 1$. Această ecuaţie nu are soluţii pentru $a = 1, 2, 3$ deoarece membrul stâng este fie negativ, fie par, iar pentru $a \geq 4$ avem $5^n(a^2 - 5) > 5(a+2)(a-3) \geq 5a + 10 > 2a - 1$.

Aşadar, $n = 1$ este singura soluţie.

Am primit soluţii de la: *David Andrei Anghel, Carol Luca Gasan, Radu-Alexandru Vasilescu, Luca Pană, Ioana Stănoiu* şi *Şerban Radu.*

Problem of the week no. 191
Determine all positive integers n such that $5^{2n+1} - 5^n + 1$ is a perfect square.

Saudi Arabia TST, 2014

Solution: If $5^{2n+1} - 5^n + 1 = k^2$ cu $k \in \mathbb{N}$, then k is odd and we have $5^n(5^{n+1} - 1) = (k-1)(k+1)$. As $k-1$ and $k+1$ are consecutive even numbers, their greatest common divisor is 2, therefore the two numbers must be $2 \cdot 5^n$ and $\dfrac{5^{n+1}-1}{2}$. Indeed, $n \geq 1$ leads to $k \geq 11$. Then $\dfrac{k+1}{k-1} = 1 + \dfrac{2}{k-1} \leq 1 + \dfrac{2}{10} = \dfrac{6}{5}$.

If $k-1$ and $k+1$ are $5^n \cdot 2p$ and $\dfrac{5^{n+1}-1}{2p}$, with $p \geq 2$,then their ratio would be $\dfrac{5^n \cdot 4p^2}{5^{n+1}-1} > \dfrac{4p^2}{5} \geq \dfrac{16}{5} > \dfrac{6}{5}$.

Moreover, since $2 \cdot 5^n < \dfrac{5^{n+1}-1}{2}$, we must have $k-1 = 2 \cdot 5^n$ and $k+1 = \dfrac{5^{n+1}-1}{2}$.

By subtraction, we get $\dfrac{5^{n+1}-1}{2} - 2 \cdot 5^n = 2$, which leads to $n = 1$.

Conversely, for $n = 1$, the number $5^{2n+1} - 5^n + 1 = 121 = 11^2$ is indeed a perfect square, therefore $n = 1$ is the only solution to the problem.