BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 4, 2019

Problema 1. O mulţime S se numeşte *vecină* dacă satisface următoarele două proprietăţi:
i) S are 4 elemente;
ii) pentru orice element $x \in S$, cel puţin unul dintre numerele $x-1$ şi $x+1$ îi aparţine lui S.
Aflaţi numărul tuturor submulţimilor vecine ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 2. Arătaţi că nu există numere naturale x, y, z astfel încât

$$(3x+4y)(4x+5y) = 7^z.$$

Problema 3. Fie S o mulţime de numere reale astfel încât:
i) $1 \in S$;
ii) pentru orice $a, b \in S$ (nu neapărat diferite), avem $a - b \in S$;
iii) pentru orice $a \in S$, $a \neq 0$, avem $\frac{1}{a} \in S$.
Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in S$, avem $ab \in S$.

Problema 4. În triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle ACB) = 45^\circ$, fie O şi H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul. Dreapta care trece prin O şi este perpendiculară pe CO intersectează AC şi BC în K, respectiv L. Demonstraţi că perimetrul lui KLH este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. O mulţime S se numeşte *vecină* dacă satisface următoarele două proprietăţi:
i) S are 4 elemente;
ii) pentru orice element $x \in S$, cel puţin unul dintre numerele $x-1$ şi $x+1$ îi aparţine lui S.
Aflaţi numărul tuturor submulţimilor vecine ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soluţie:
Fie x indicele celui mai mic element al unei mulţimi vecine, iar y indicele celui mai mare element. Atunci submulţimea constă din elementele $a_x, a_{x+1}, a_{y-1}, a_y$. Astfel, numărul de submulţimi vecine este numărul perechilor (x, y) cu $y - x \geq 3$. Numărul acestora este

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

Problema 2. Arătaţi că nu există numere naturale x, y, z astfel încât

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

Soluţie:
Din ipoteză rezultă că numerele $3x + 4y$ şi $4x + 5y$ trebuie să fie puteri ale lui 7, deci la fel trebuie să fie şi câtul împărţirii lor. Dar

$$1 < \frac{4x + 5y}{3x + 4y} < 2,$$

deci acesta nu poate fi putere a lui 7.

Remarcă: O altă cale de a rezolva problema: din $7 \mid 3x + 4y$ şi $7 \mid 4x + 5y$ rezultă $7 \mid 4(3x + 4y) - 3(3x + 5y) = y$, deci $7 \mid y$ şi $7 \mid x$. Înlocuind $x = 7x'$ şi $y = 7y'$ obţinem că $3x' + 4y'$ şi $4x' + 5y'$ sunt puteri ale lui 7. Dar acest proces poate fi repetat de o infinitate de ori, contradicţie.

Problema 3. Fie S o mulţime de numere reale astfel încât:
i) $1 \in S$;
ii) pentru orice $a, b \in S$ (nu neapărat diferite), avem $a - b \in S$;
iii) pentru orice $a \in S$, $a \neq 0$, avem $\frac{1}{a} \in S$.
Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in S$, avem $ab \in S$.

Soluţie:
Dacă $a = 0 \in S$ sau $a = 1$, atunci pentru orice $b \in S$ rezultă $ab \in S$. Aşadar, putem presupune $a, b \notin \{0, 1\}$.
Din $1 \in S$ şi $a \in S$ rezultă $1 - a \in S$, apoi $(1 - a) - 1 = -a \in S$.

Pentru orice $b \in S$ avem atunci $b - (-a) = b + a \in S$. De asemenea, $a - 1 \in S$, deci $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a-1} \in S$, de unde

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{(a-1)a} \in S.$$

Rezultă că şi $a(a-1) \in S$, deci şi $a(a-1) + a = a^2 \in S$. Dacă $a, b \in S$, atunci $a^2, b^2, (a+b)^2 \in S$, deci $(a+b)^2 - a^2 = b^2 + 2ab \in S$ şi $(b^2 + 2ab) - b^2 = 2ab \in S$. De aici rezultă că $\frac{1}{2ab} \in S$, deci

$$\frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} = \frac{1}{ab} \in S,$$

de unde $ab \in S$.

Problema 4. În triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle ACB) = 45°$, fie O şi H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul. Dreapta care trece prin O şi este perpendiculară pe CO intersectează AC şi BC în K, respectiv L. Demonstraţi că perimetrul lui KLH este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluţie:
Fie E şi F punctele în care semidreptele $(AH$ şi $(BH$ intersectează cercul circumscris. Un calcul de unghiuri arată că E este simetricul lui H faţă de BC. Avem $m(\sphericalangle HBC) = 90° - m(\sphericalangle C) = 45°$, deci $m(\sphericalangle CBE) = m(\sphericalangle CBH) = 45°$.
Aşadar, $m(\sphericalangle CFE) = 45°$, ceea ce implică $m(\sphericalangle COE) = 90°$. Analog, $m(\sphericalangle COF) = 90°$, deci punctele E, L, K, F sunt coliniare. De aici deducem că $LH = LE$ şi $KH = KF$, ceea ce înseamnă că

$$P_{HKL} = HL + LK + KH = EL + LK + KF = EF$$

care este diametru al cercului circumscris.