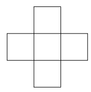
BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 3, 2019

Problema 1. Determinaţi numărul maxim de cruci care se pot plasa fără suprapuneri pe o suprafaţă pătrată 8×8 astfel încât fiecare din cele cinci pătrăţele ale unei cruci să acopere câte un pătrat unitate al tablei 8×8.



Problema 2. Determinaţi toate perechile (m, n) de numere naturale pentru care

$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi scalen. Punctele D şi E sunt în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle EBC$ şi $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ECB$.
Demonstraţi că triunghiul ADE este dreptunghic.

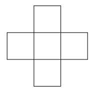
Problema 4. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale. Arătaţi că există $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| \leq |a_k|.$$

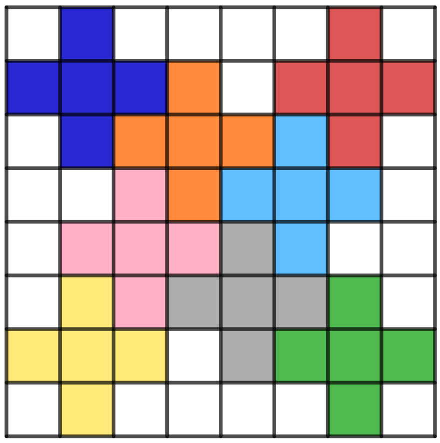
Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi numărul maxim de cruci care se pot plasa fără suprapuneri pe o suprafaţă pătrată 8×8 astfel încât fiecare din cele cinci pătrăţele ale unei cruci să acopere câte un pătrat unitate al tablei 8×8.



Soluţie:
Să observăm că pătrăţelele din cele patru colţuri nu pot fi acoperite cu cruci. Astfel, putem presupune că ele au fost îndepărtate de pe tablă şi că sunt numai 60 de pătrăţele.
De pe primul rând, cel mult două pătrăţele pot fi acoperite de cruci, deci cel puţin 4 (din cele 6 rămase) nu vor fi acoperite. Acelaşi argument funcţionează şi pentru ultima linie, prima coloană şi ultima coloană. Astfel, cel mult $60 - 4 \cdot 4 = 44$ pătrăţele vor fi acoperite. O cruce acoperă 5, deci putem avea cel mult 8 cruci. Rămâne să dăm un exemplu cu 8 cruci.



Problema 2. Determinaţi toate perechile (m, n) de numere naturale pentru care
$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271.$$

Soluţie:
Considerând ecuaţia mod 5 obţinem
$$3^m \equiv -1 \pmod 5,$$
deci $m = 4k + 2$ cu k natural. Considerând acum ecuaţia mod 7, avem
$$-2^n - 9^{2k+1} \equiv 5 \pmod 7,$$
ceea ce înseamnă
$$2^n + 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod 7.$$

Cum $2^s \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$, singura posibilitate este $2^n \equiv 2^{2k+1} \equiv 1 \pmod 7$, deci $3 \mid n$ şi $3 \mid 2k+1$. Din ultima obţinem $3 \mid m$, deci putem scrie $n = 3x$, $m = 3y$, $x, y \in \mathbb{N}$.
Astfel, ecuaţia din enunţ se scrie $5^3 \cdot 2^{3x} - 3^{3y} = 271$, sau

$$(5 \cdot 2^x - 3^y)(25 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y}) = 271.$$

Rezultă că $25 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y} \leq 271$, de unde $x < 2$. Convine $x = 1$ pentru care se obţine $y = 2$. Astfel, $m = 6$ şi $n = 3$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi scalen. Punctele D şi E sunt în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle EBC$ şi $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ECB$.
Demonstraţi că triunghiul ADE este dreptunghic.

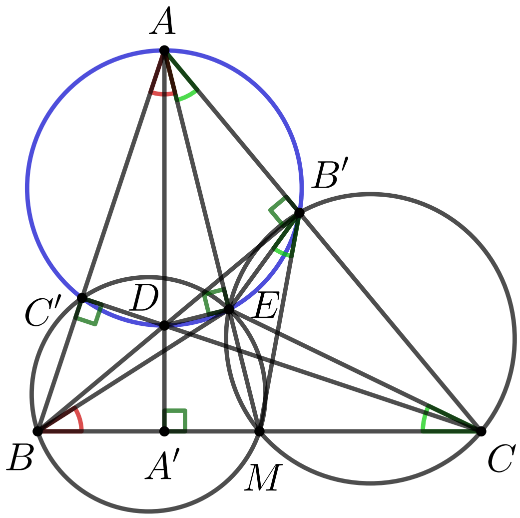
Soluţie:
Mai întâi vom demonstra că D este ortocentrul triunghiului ABC. Notăm $\{A'\} = AD \cap BC$, $\{B'\} = BD \cap CA$, $\{C'\} = CD \cap AB$. Deoarece $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$, patrulaterul $ACA'C'$ este inscriptibil. Analog, şi $ABA'B'$ este inscriptibil. Atunci $\sphericalangle DA'B \equiv \sphericalangle DB'A$, $\sphericalangle DA'C \equiv \sphericalangle DC'A$ şi $DA \cdot DA' = DB \cdot DB' = DC \cdot DC'$, deci şi $BCB'C'$ este inscriptibil. Atunci $\sphericalangle DB'A \equiv \sphericalangle DC'A$ ceea ce implică $\sphericalangle DA'B \equiv \sphericalangle DA'C$. Dar $m(\sphericalangle DA'B) + m(\sphericalangle DA'C) = 180^\circ$ implică $AA' \perp BC$. De aici rezultă $BB' \perp CA$ şi $CC' \perp AB$, deci D este ortocentrul triunghiului ABC.

(*Altfel:* Dacă AD intersectează a doua oară cercul circumscris lui BCD în P, rezultă imediat că BC este mediatoarea lui $[AP]$, deci $AD \perp BC$. De aici rezultă uşor că D este ortocentrul.)

Fie acum M intersecţia lui AE cu BC. Din $\sphericalangle EBM \equiv \sphericalangle EAB$ rezultă că MB este tangentă cercului circumscris triunghiului ABE. Analog, MC este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE, deci

$$ME \cdot MA = MB^2 = MC^2 = MB'^2 = MC'^2$$

(deoarece $MB = MC = MB' = MC'$). Rezultă că MB' este tangentă cercului circumscris triunghiului AEB', deci $\sphericalangle AEB' \equiv \sphericalangle MB'C = \sphericalangle C$. Analog, $\sphericalangle AEC' \equiv \sphericalangle B$, deci $m(\sphericalangle B'EC') = m(\sphericalangle AEB') + m(\sphericalangle AEC') = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$. Aşadar, $AB'EC'$ este inscriptibil, dar şi $AB'DC'$ este inscriptibil, deci cele cinci puncte, A, B', C', D, E sunt conciclice, ceea ce implică $m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle AB'D) = m(\sphericalangle AC'D) = 90^\circ$. Aşadar, triunghiul ADE este dreptunghic.



Remarcă: Această problemă scoate în evidenţă o proprietate a punctului Humpty (vezi On two special points in triangle).

Problema 4. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale. Arătaţi că există $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leq |a_k|.$$

Soluţie:
Să notăm

$$S_x = \sum_{i=1}^{x} a_i - \sum_{i=x+1}^{n} a_i.$$

Atunci $S_0 = -S_n$ şi $S_{x+1} - S_x = 2a_{x+1}$. Putem presupune $S_n \geq 0$. Fie m astfel încât $S_m \leq 0$, $S_{m+1} \geq 0$. Atunci

$$|S_m| + |S_{m+1}| = |S_m - S_{m+1}| = 2|a_{m+1}|,$$

deci fie $|S_m|$, fie $|S_{m+1}|$ este mai mic sau egal ca $|a_{m+1}|$ care este mai mic sau egal ca $\max_i |a_i| = |a_k|$.