BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 1, 2019

Problema 1. Determinaţi cel mai mic număr natural m pentru care există numere naturale $n > k > 1$ astfel încât

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{k} \cdot m.$$

Problema 2. La şah, calul atacă pătrăţelele situate la distanţă $\sqrt{5}$. Pe o tablă 12×12 sunt plasaţi nişte cai astfel încât în fiecare pătrat 2×2 să existe măcar un cal. Aflaţi numărul maxim de pătrăţele care nu sunt atacate de cai. (Un cal nu atacă pătrăţelul pe care se află.)

Problema 3. Câte numere naturale n satisfac următoarele condiţii:
i) $219 \leq n \leq 2019$,
ii) există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 \leq x < n < y$ şi y este divizibil cu toate numerele naturale de la 1 la n cu excepţia numerelor x şi $x+1$ cu care y nu este divizibil.

Problema 4. Fie AD înălţimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC. Fie DE înălţime a triunghiului ADB şi DZ înălţime a triunghiului ADC. Pe dreapta AB se consideră punctul N astfel încât CN este paralelă cu EZ. Fie A' simetricul lui A faţă de dreapta EZ şi I, K proiecţiile lui A' pe AB, respectiv AC. Demonstraţi că $\sphericalangle NA'T \equiv \sphericalangle ADT$, unde T este punctul de intersecţie dintre IK şi DE.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi cel mai mic număr natural m pentru care există numere naturale $n > k > 1$ astfel încât

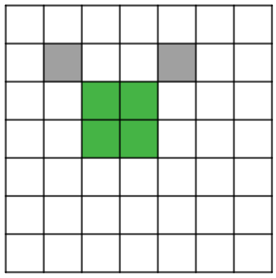
$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{k} \cdot m.$$

Soluţie:
Evident, trebuie ca $m > 9$. Dacă $m = \overline{ab}$, unde $a \geq 1$, atunci trebuie să avem $b = 1$ pentru ca ultima cifră a produsului $1 \cdot m$ să fie egal cu 1. În acest caz, penultima cifră a produsului $\underbrace{11\ldots1}_{k} \cdot m$ este egală cu ultima cifră a lui $a+1$ şi nu poate fi egală cu 1. Aşadar, $m \geq 100$. Evident, $m = 100$ nu satisface condiţia, însă $m = 101$ o satisface întrucât $11 \cdot 101 = 1111$.
Aşadar, răspunsul la problemă este $m = 101$.

Problema 2. La şah, calul atacă pătrăţelele situate la distanţă $\sqrt{5}$. Pe o tablă 12×12 sunt plasaţi nişte cai astfel încât în fiecare pătrat 2×2 să existe măcar un cal. Aflaţi numărul maxim de pătrăţele care nu sunt atacate de cai. (Un cal nu atacă pătrăţelul pe care se află.)

Soluţie:

Să observăm că dacă punem un cal în oricare din cele patru pătrăţele verzi din figura alăturată, acesta va ataca unul din cele două pătrăţele gri. Cum pătrăţelele verzi formează un pătrat 2×2, cel puţin unul din cele două pătrăţele gri va fi atacat.



Să împărţim acum tabla în 72 de perechi, ca în figura de mai jos (în care am marcat 12 din cele 72 de perechi).

1	2	3	1	2	3	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	10	11	12	10	11	12

Conform celor de mai sus, cel puţin 72 dintre pătrăţelele tablei sunt atacate de cai. Pentru a da un exemplu în care exact 72 de pătrăţele sunt atacate, colorăm tabla ca pe o tablă de şah şi punem cai pe pătrăţelele negre. Atunci pătrăţelele negre nu sunt atacate, în vreme ce toate cele albe sunt atacate, deci exact 72 dintre pătrăţele sunt atacate.
Aşadar, răspunsul la problemă este 72.

Problema 3. Câte numere naturale n satisfac următoarele condiţii:
i) $219 \leq n \leq 2019$,
ii) există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 \leq x < n < y$ şi y este divizibil cu toate numerele naturale de la 1 la n cu excepţia numerelor x şi $x+1$ cu care y nu este divizibil.

Soluţie:
Răspunsul este 292.
Observăm că dacă $x = pq$, cu $p, q > 1$ şi $(p, q) = 1$, atunci $1 < p, q < x$, deci $p \mid y$, $q \mid y$, ceea ce implică $x \mid y$, contradicţie.
Aşadar, x trebuie să fie o putere a unui număr prim şi la fel se arată şi despre $x+1$ că trebuie să fie putere a unui număr prim. Dar unul dintre aceste două numere este par, deci trebuie să fie o putere a lui 2.
Pe de altă parte, deoarece $2x \nmid y$, trebuie ca $n < 2x$. Dacă pentru un n există un x cu proprietăţile din enunţ, atunci este uşor de găsit un $y > n$ divizibil cu toate numerele naturale de la 1 la n cu excepţia numerelor x şi $x+1$.
Aşadar, un număr n are proprietatea din enunţ dacă există o putere a lui 2, cuprinsă între $\frac{n}{2}$ şi n, cu proprietatea că unul din vecinii săi este putere a unui număr prim.
1. Pentru orice număr $219 \leq n \leq 255$ putem lua $x = 127^1$ şi $x + 1 = 2^7$.
2. Pentru orice număr $257 \leq n \leq 511$ putem lua $x = 2^8$ şi $x + 1 = 257^1$.
3. Pentru numerele $513 \leq n \leq 1023$ nu putem alege niciun x deoarece nici 511 şi

nici 513 nu sunt puteri de numere prime.
4. Pentru numerele $1025 \leq n \leq 2019$ nu putem alege niciun x deoarece nici 1023 şi nici 1025 nu sunt puteri de numere prime.
Aşadar, în total sunt $37 + 255 = 292$ de numere cu proprietatea din enunţ.

Problema 4. Fie AD înălţimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC. Fie DE înălţime a triunghiului ADB şi DZ înălţime a triunghiului ADC. Pe dreapta AB se consideră punctul N astfel încât CN este paralelă cu EZ. Fie A' simetricul lui A faţă de dreapta EZ şi I, K proiecţiile lui A' pe AB, respectiv AC. Demonstraţi că $\sphericalangle NA'T \equiv \sphericalangle ADT$, unde T este punctul de intersecţie dintre IK şi DE.

Soluţie:
Fie L, M, F punctele în care dreapta AA' intersectează dreptele EZ, BC, respectiv CN. Segmentul IK, fiind diagonală a dreptunghiului $KA'IA$, trece prin L care, din construcţie, este mijlocul celeilalte diagonale, AA'. Triunghiurile ZAL şi ALE sunt asemenea, deci $\sphericalangle ZAL \equiv \sphericalangle AEZ$. Din asemănarea triunghiurilor ABC şi DAB avem $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAD$. Aşadar avem $\sphericalangle AEZ \equiv \sphericalangle BAD$, deci

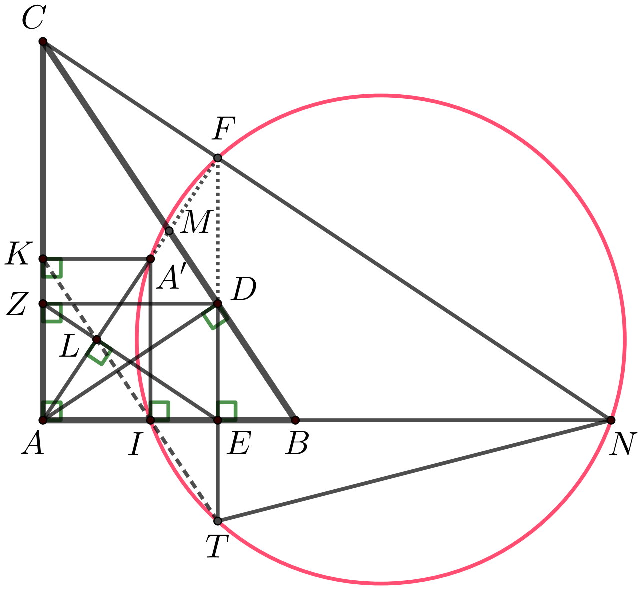
$$\sphericalangle ZAL \equiv \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACM.$$

Deoarece $AF \perp CN$, triunghiurile dreptunghice AFC şi CDA sunt congruente. Atunci şi înălţimile duse din F, respectiv D în cele două triunghiuri sunt congruente. Rezultă că $FD \parallel AC$ şi cum $DE \parallel AC$ obţinem că punctele D, E, F sunt coliniare. În triunghiul LFT avem

$$A'I \parallel FT \text{ şi } \sphericalangle LA'I \equiv \sphericalangle LIA',$$

deci $\sphericalangle LTF \equiv \sphericalangle LFT$. Rezultă că punctele A', I, F, T sunt conciclice. De asemenea, $m(\sphericalangle A'IN) = m(\sphericalangle A'FN) = 90°$, deci şi punctele I, A', F, N sunt conciclice. Astfel, punctele I, A', F, N, T se află, toate, pe un cerc. De aici deducem că

$$\sphericalangle NA'T \equiv \sphericalangle TFN \equiv \sphericalangle ACF \equiv \sphericalangle FEZ \equiv \sphericalangle ADT.$$


C
F
M
K
A′
D
Z
L
A
I
E
B
N
T