

TEST DE ANTRENAMENT nr. 8
Arabia Saudită, 2019

Problema 1. Fie E un punct în interiorul paralelogramului $ABCD$ astfel încât $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BAE$. Arătați că centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABE , BCE , CDE și DAE sunt conciclice.

Problema 2. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstrați că

$$\frac{a^3}{a^2 + bc} + \frac{b^3}{b^2 + ca} + \frac{c^3}{c^2 + ab} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. Determinați numerele naturale de forma \overline{abcd} pentru care

$$\overline{abcd} = a^{a+b+c+d} - a^{-a+b-c+d} + a.$$

Problema 4. Toate pătrățelele unitate ale unei table 8×8 sunt la început albe. Omar și Asaad joacă următorul joc: mai întâi Omar colorează n pătrățele cu roșu, apoi Asaad alege 4 linii și 4 coloane pe care le colorează cu negru. Omar câștigă dacă pe tablă a rămas cel puțin un pătrățel roșu. Aflați cea mai mică valoare a lui n pentru care Omar poate întotdeauna câștiga, indiferent de mutările lui Asaad.