TEST DE ANTRENAMENT nr. 5
Arabia Saudită, 2019

Problema 1. Fie n un număr natural. Câteva dintre pătrăţelele unitate ale unei table $n \times n$ sunt colorate cu verde astfel încât nicicare două pătrăţele verzi să nu aibă vreo latură comună. Este întotdeauna adevărat (adică oricum am colora cu verde pătrăţele) că putem plasa pe tablă n ture care să nu se atace una pe alta şi care să nu stea (niciuna) pe un pătrăţel verde, dacă:
a) $n = 19$;
b) $n = 20$?

Problema 2. Două cercuri, având centrele în A şi B, se intersectează în punctele M şi N. Razele AP şi BQ sunt paralele şi se află în semiplane diferite determinate de AB. Dacă tangentele comune exterioare intersectează AB în D, iar PQ intersectează AB în C, demonstraţi că unghiul $\sphericalangle CND$ este drept.

Problema 3. Se consideră zece ecuaţii de gradul II

$$x^2 + a_1 x + b_1 = 0,\ x^2 + a_2 x + b_2 = 0, \ldots,\ x^2 + a_{10} x + b_{10} = 0,$$

fiecare dintre ele având două soluţii reale distincte, iar mulţimea tuturor soluţii este $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 10\}$. Aflaţi valoarea minimă a sumei $b_1 + b_2 + \ldots + b_{10}$.
(Reformulare: dacă $\{y_1, y_2, \ldots, y_{20}\} = \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 10\}$, aflaţi valoarea minimă a expresiei $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \ldots + y_{19} y_{20}$.)

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale $k > 1$ care au proprietatea: există un număr natural n pentru care numărul $A = 17^{18n} + 4 \cdot 17^{2n} + 7 \cdot 19^{5n}$ poate fi scris ca produsul a k numere naturale consecutive.