

**TEST DE ANTRENAMENT nr. 4**  
**Arabia Saudită, 2019**

**Problema 1.** Fiecare număr întreg este colorat cu una din trei culori. Arătați că există două numere diferite de aceeași culoare a căror diferență este pătrat perfect.

**Problema 2.** Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Aflați valoarea minimă a expresiei

$$S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

**Problema 3.** Fie  $d$  un divizor pozitiv al numărului  $A = 1024^{1024} + 5$  și să presupunem că  $d$  se poate scrie sub forma  $d = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ , cu  $x, y$  numere întregi. Ce resturi putem obține când îl împărțim pe  $d$  la 20?

**Problema 4.** Un număr natural nenul  $n$  este *drăguț* dacă suma pătratelor divizorilor săi naturali este  $(n + 3)^2$ . De exemplu,  $287 = 7 \cdot 41$  este drăguț deoarece  $1^2 + 7^2 + 41^2 + 287^2 = 84100 = (287 + 3)^2$ . Demonstrați că, dacă pentru două numere prime  $p$  și  $q$  (nu neapărat diferite) numărul  $n = pq$  este drăguț, atunci  $n + 2$  și  $2(n + 1)$  sunt, ambele, pătrate perfecte.