

TEST DE ANTRENAMENT nr. 2
Arabia Saudită, 2019

Problema 1. Fiecare pătrățel unitate al unei table 8×8 este fie alb, fie negru. Se știe că printre oricare 9 pătrățele unitate care formează un pătrat 3×3 există un număr par de pătrățele albe. Care este numărul minim de pătrățele negre de pe tablă?

Problema 2. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstrați că

$$\frac{\sqrt{a}}{b+1} + \frac{\sqrt{b}}{c+1} + \frac{\sqrt{c}}{a+1} > \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Problema 3. Stabiliți dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n + 2$ divide suma

$$S = 1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019}.$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în care $AB = BC$ și $AD = CD$. Punctul M se află pe arcul mic CD al cercului circumscris patrulaterului. Dreptele BM și CD se intersectează în punctul P , iar dreptele AM și BD se intersectează în punctul Q . Demonstrați că $PQ \parallel AC$.