# BARAJ DE JUNIORI
# Arabia Saudită, barajul 3, 2018

**Problema 1.** Fie $n$ un număr natural compus. Pentru fiecare divizor propriu $d$ al lui $n$ scriem pe tablă numărul $d+1$. Determinaţi toate numerele naturale $n$ pentru care numerele scrise pe tablă sunt tocmai divizorii proprii ai unui număr natural $m$. (Divizorii proprii ai unui număr natural $a > 1$ sunt divizorii pozitivi ai lui $a$ diferiţi de 1 şi de $a$.)

**Problema 2.** Fie $ABCD$ un pătrat înscris în cercul $\mathscr{C}$. Fie $P$ un punct pe arcul mic $CD$ al cercului $\mathscr{C}$. Dreapta $PB$ intersectează $AC$ în $E$. Dreapta $PA$ intersectează $DB$ în $F$. Cercul circumscris triunghiului $PEF$ intersectează a doua oară $\mathscr{C}$ în $Q$. Demonstraţi că $PQ$ este paralelă cu $CD$.

**Problema 3.** Demonstraţi că în orice triunghi există două laturi de lungimi $x$ şi $y$ astfel încât

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

**Problema 4.** Fie $n > 2$ un număr natural. Considerăm $n$ pungi cu bomboane, fiecare din ele conţinând exact o bomboană. Ali şi Omar joacă următorul joc în care cei doi mută alternativ (Ali mută primul): La fiecare mutare a sa, jucătorul alege două pungi care conţin $x$, respectiv $y$ bomboane, cu $x$ şi $y$ prime între ele, apoi pune cele $x+y$ bomboane într-o singură pungă. Cel care nu mai poate muta pierde. Care din cei doi jucători are o strategie pentru a câştiga acest joc?

*Timp de lucru:* 4 ore şi 30 de minute

**Soluţii oficiale:**

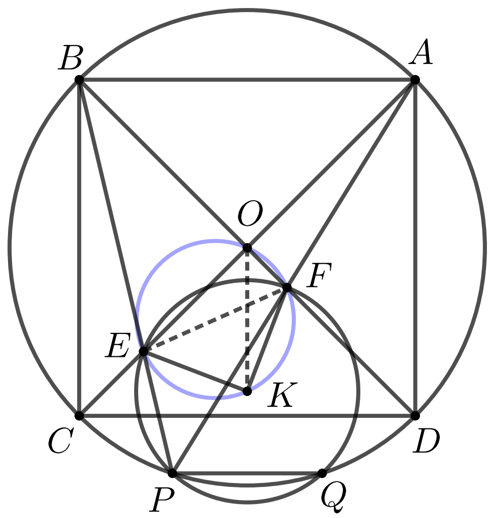
**Problema 1.** Fie $n$ un număr natural compus. Pentru fiecare divizor propriu $d$ al lui $n$ scriem pe tablă numărul $d+1$. Determinaţi toate numerele naturale $n$ pentru care numerele scrise pe tablă sunt tocmai divizorii proprii ai unui număr natural $m$. (Divizorii proprii ai unui număr natural $a > 1$ sunt divizorii pozitivi ai lui $a$ diferiţi de 1 şi de $a$.)

**Soluţie:**
Numărul 2 nu apare pe tablă deoarece $d \neq 1$. Atunci $m$ trebuie sa fie impar, deci toate numerele de pe tablă trebuie să fie impare. Atunci $n$ nu are divizori proprii impari, deci $n = 2^k$ pentru un $k > 1$.
Dacă $n = 4$, pe tablă se scrie numai numărul 3, adică singurul divizor propriu ai lui $m = 9$. Aşadar, $n = 4$ convine.
Dacă $n = 8$, pe tablă se scriu numerele 3 şi 5, adică divizorii proprii ai lui $m = 15$. Aşadar şi $n = 8$ convine.
Presupunând că un număr compus $n \geq 16$ ar satisface condiţia din enunţ. Divizorii proprii ai lui $n = 2^k$ sunt $2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}$, deci pe tablă trebuie să se afle numerele $3, 5, 9, ..., 2^{k-1} + 1$. Cum $3, 5, 9$ sunt divizori ai unui număr natural $m$, trebuie ca $45 \mid m$, deci 15 este un divizor propriu al lui $m$. Dar 15 nu este pe tablă deoarece 14 nu este putere a lui 2.
În concluzie, $n = 4$ şi $n = 8$ sunt singurele soluţii.

**Problema 2.** Fie $ABCD$ un pătrat înscris în cercul $\mathscr{C}$. Fie $P$ un punct pe arcul mic $CD$ al cercului $\mathscr{C}$. Dreapta $PB$ intersectează $AC$ în $E$. Dreapta $PA$ intersectează $DB$ în $F$. Cercul circumscris triunghiului $PEF$ intersectează a doua oară $\mathscr{C}$ în $Q$. Demonstraţi că $PQ$ este paralelă cu $CD$.

**Soluţie**

Fie $K$ centrul cercului circumscris triunghiului $PEF$. Observăm că $m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle ADB) = 45°$, deci triunghiul $KEF$ este dreptunghic isoscel cu vârful în $K$. Astfel, patrulaterul $OEKF$ este inscriptibil.
Rezultă că $m(\sphericalangle FOK) = m(\sphericalangle FEK) = 45°$, deci $OK$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOC$, prin urmare şi mediatoarea laturii $CD$. Cum $KP = KQ$ şi $OP = OQ$, avem $OK \perp PQ$. Aşadar, $PQ$ şi $CD$ sunt paralele.



**Problema 3.** Demonstraţi că în orice triunghi există două laturi de lungimi $x$ şi $y$ astfel încât

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

**Soluţie:**
Fie $a, b, c$ lungimile laturilor triunghiului. Putem presupune că $a \geq b \geq c$.
Fie $m = \frac{a}{b}$ şi $n = \frac{b}{c}$. Atunci $m, n \geq 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Vom arăta că măcar unul din numerele $m$ şi $n$ este mai mic sau egal ca $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Să presupunem că $m, n > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Cum $b + c > a$, avem $n + 1 > mn$. Obţinem că $n + 1 > mn > \frac{\sqrt{5}+1}{2} n$, de unde $n < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ceea ce reprezintă o contradicţie.
Prin urmare, cel puţin unul dintre numerele $m$ şi $n$ este mai mic sau egal ca $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 4.** Fie $n > 2$ un număr natural. Considerăm $n$ pungi cu bomboane, fiecare din ele conţinând exact o bomboană. Ali şi Omar joacă următorul joc în care cei doi mută alternativ (Ali mută primul): La fiecare mutare a sa, jucătorul alege două pungi care conţin $x$, respectiv $y$ bomboane, cu $x$ şi $y$ prime între ele, apoi pune cele $x + y$ bomboane într-o singură pungă. Cel care nu mai poate muta pierde. Care din cei doi jucători are o strategie pentru a câştiga acest joc?

**Soluţie:**
Vom demonstra că, pentru orice $n > 2$, Omar este cel care are strategie câştigătoare.
La început, Ali trebuie să unească două pungi cu câte o bomboană într-o pungă cu două bomboane. Arătăm că Omar poate face astfel încât să lase o pungă cu un număr impar de bomboane, iar toate celelalte pungi să aibă câte o singură bomboană. Într-adevăr, Omar uneşte punga cu două bomboane cu o pungă cu o bomboană obţinând o pungă cu 3 bomboane. Să presupunem că după o mutare a lui Omar există o pungă cu $2k + 1$ bomboane (cu $k \in \mathbb{N}^*$), iar celelalte pungi conţin câte o bomboană. La următoarea sa mutare, Ali are două posibilităţi:
• el poate uni două pungi de câte o bomboană formând o pungă cu 2 bomboane; în acest caz Omar uneşte punga cu $2k + 1$ bomboane cu cea cu 2 bomboane şi obţine o pungă cu $2k + 3$ bomboane.
• el poate uni punga cu $2k + 1$ bomboane cu una cu o bomboană şi obţine o pungă cu $2k + 2$ bomboane; atunci Omar uneşte acestă pungă cu una cu o bomboană obţinând din nou o pungă cu $2k + 3$ bomboane.
Aşadar, Omar poate întotdeauna controla situaţia pungilor. Să mai observăm că după o pereche de mutări, numărul de pungi scade cu 2.
Dacă $n$ este impar, Omar va urma strategia de mai sus până când ajunge să-i lase lui Ali o singură pungă. Ali nu mai poate muta, prin urmare pierde.
Dacă $n$ este par, cu strategia de mai sus Omar face să se ajungă la o pungă cu $2k + 1$ bomboane şi 3 pungi cu câte o bomboană.
Ali va uni două pungi cu un număr impar de bomboane şi va obţine o pungă cu

un număr par de bomboane (fie 2, fie $2k + 2$). Omar va uni celelalte două pungi, obţinând şi el o pungă cu un număr par de bomboane. Astfel, Ali urmează la mutare având două pungi cu un număr par de bomboane, prin urmare el nu mai are mutare şi pierde.
În concluzie, pentru orice $n > 2$ Omar are strategie câştigătoare.