BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 2, 2018

Problema 1. Numerele prime distincte p, q, r satisfac ecuaţia

$$2pqr + 50pq = 7pqr + 55pr = 8pqr + 12qr = A$$

pentru un anumit număr natural A. Aflaţi A.

Problema 2. Fie a, b, c numere reale cu proprietatea $a+b+c+ab+bc+ca+abc \geq 7$. Demonstraţi că

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6.$$

Problema 3. Cubul $n \times n \times n$ constă din n^3 cuburi unitate $1 \times 1 \times 1$, iar cel puţin unul dintre aceste cuburi unitate este negru. Arătaţi că putem întotdeauna tăia cubul în bucăţi paralelipipedice astfel încât fiecare bucată să conţină exact un cub unitate negru.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care O şi H sunt centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul. Fie M un punct pe arcul mic BC al cercului circumscris (diferit de B şi C) şi fie D, E, F simetricele punctului M faţă de dreptele OA, OB, OC. Notăm cu K intersecţia dreptelor BF şi CE şi cu I centrul cercului înscris în triunghiul DEF.
a) Demonstraţi că mediatoarele segmentelor $[EF]$ şi $[IK]$ se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC.
a) Demonstraţi că punctele H, K, I sunt coliniare.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Numerele prime distincte p, q, r satisfac ecuaţia

$$2pqr + 50pq = 7pqr + 55pr = 8pqr + 12qr = A$$

pentru un anumit număr natural A. Aflaţi A.

Soluţie: Rescriem condiţia sub forma $pq(2r+50) = pr(7q+55) = qr(8p+12) = A$. Constatăm că A trebuie să fie divizibil cu p, q şi r, deci $K = \frac{A}{pqr}$ este un număr natural. Împărţind, obţinem $K = 2 + \frac{50}{r} = 7 + \frac{55}{q} = 8 + \frac{12}{p}$. Deducem că $p \mid 12$, $q \mid 55$, $r \mid 50$. De aici rezultă următoarele posibilităţi:
- $p = 2$, $q = 11$, $r = 5$;
- $p = 3$, $q = 11$, $r = 5$;
- $p = 3$, $q = 11$, $r = 2$;
- $p = 3$, $q = 5$, $r = 2$.

Convine numai tripletul $(p, q, r) = (3, 11, 5)$ pentru care se obţine $K = 12$ şi apoi $A = 1980$.

Problema 2. Fie a, b, c numere reale cu proprietatea $a+b+c+ab+bc+ca+abc \geq 7$. Demonstraţi că

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6.$$

Soluţie:
Pornim de la $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
Atunci $\sqrt{a^2 + b^2 + 2} \geq \sqrt{|a| \cdot |b| + |a| + |b| + 1} = \sqrt{(|a| + 1)(|b| + 1)}$ şi analoagele.
Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq$
$\sqrt{(|a| + 1)(|b| + 1)} + \sqrt{(|b| + 1)(|c| + 1)} + \sqrt{(|c| + 1)(|a| + 1)} \geq$
$3\sqrt[3]{(|a| + 1)(|b| + 1)(|c| + 1)} = 3\sqrt[3]{|abc| + |ab| + |bc| + |ca| + |a| + |b| + |c| + 1} \geq$
$3\sqrt[3]{abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1} \geq 3\sqrt[3]{7 + 1} = 6.$
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 3. Cubul $n \times n \times n$ constă din n^3 cuburi unitate $1 \times 1 \times 1$, iar cel puţin unul dintre aceste cuburi unitate este negru. Arătaţi că putem întotdeauna tăia cubul în bucăţi paralelipipedice astfel încât fiecare bucată să conţină exact un cub unitate negru.

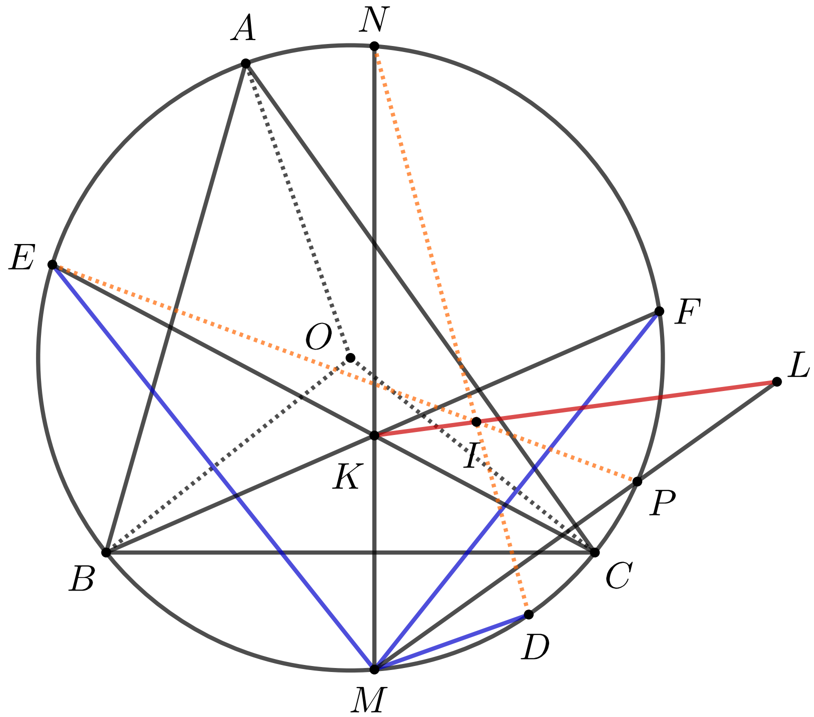
Soluţie:
Demonstrăm că afirmaţia este adevărată pentru orice paralelipiped dreptunghic $a \times b \times c$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra această afirmaţie prin inducţie (tare) după numărul de cuburi unitate negre.
Dacă paralelipipedul conţine un singur cub unitate negru, nu trebuie să facem nicio

tăietură.
Să presupunem acum că un paralelipiped conţine cel puţin două cuburi unitate negre. Atunci putem tăia paralelipipedul astfel încât fiecare bucată să conţină cel puţin un cub unitate negru. Potrivit ipotezei de inducţie, fiecare din cele două bucăţi poate fi tăiată în bucăţi mai mici care să conţină exact un cub unitate negru.
Remarcă: Problema este foarte simplă câtă vreme observăm că problema nu se referă de fapt la un ,,cub mare" şi că de fapt ea este adevărată pentru orice paralelipiped dreptunghic.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care O şi H sunt centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul. Fie M un punct pe arcul mic BC al cercului circumscris (diferit de B şi C) şi fie D, E, F simetricele punctului M faţă de dreptele OA, OB, OC. Notăm cu K intersecţia dreptelor BF şi CE şi cu I centrul cercului înscris în triunghiul DEF.
a) Demonstraţi că mediatoarele segmentelor $[EF]$ şi $[IK]$ se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC.
a) Demonstraţi că punctele H, K, I sunt coliniare.

Soluţie:
a) Deoarece $OD = OE = OF = OM$, punctele D, E, F sunt pe cercul circumscris. OC este mediatoarea lui $[MF]$; ea intersectează cercul circumscris în mijlocul arcului MF, deci $(EC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MEF$. Analog, $(FB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MFE$. Rezultă că punctul K este centrul cercului înscris în triunghiul MEF. Aşadar, $(MK$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EMF$ şi trece prin mijlocul N al arcului EF al cercului circumscris. Astfel, aplicând o cunoscută proprietate, obţinem $NE = NK = NI = NF$.
Rezultă că punctele E, F, K, I sunt conciclice şi mediatoarele segmentelor $[EF]$ şi $[IK]$ trec prin punctul N aflat pe cercul circumscris.

b) Din aceleaşi motive (B este mijlocul arcului EM) avem $BK = BM = BE$ şi, analog, $CK = CM = CE$. Atunci K este simetricul lui M faţă de BC. Analog, dacă $\{L\} = CD \cap AF$, atunci L este simetricul lui M faţă de AC şi ML şi EI se intersectează în mijlocul P al arcului DF al cercului circumscris.
Considerăm hexagrama $CDNMPE$ şi aplicăm teorema lui Pascal. Obţinem că cele trei intersecţii, $\{L\} = CD \cap MP$, $\{I\} = DN \cap PE$, $\{K\} = CE \cap MN$ sunt coliniare. De asemenea, ştim că LK este dreapta lui Steiner a punctului M de pe cercul circumscris, deci LK trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC. De aici rezultă că punctele H, I, K sunt coliniare.


A
N
E
O
F
L
I
K
P
B
C
D
M