BARAJ DE JUNIORI
Arabia Saudită, barajul 1, 2018

Problema 1. Stabiliţi dacă există triunghiuri cu lungimile laturilor x, y, z care satisfac
$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Problema 2. Fie M şi N două numere palindrom, fiecare având 9 cifre. (Un număr palindrom este un număr care se citeşte la fel de la cap la coadă ca şi de la coadă la cap; un număr palindrom nu poate începe cu cifra 0.) Dacă $M < N$ şi nu există numere palindrom între M şi N, aflaţi toate valorile posibile ale lui $N - M$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}$ şi I centrul cercului său înscris. Dreptele IB şi IC intersectează din nou cercul $\mathscr{C}$ în J şi L. Cercul ω, circumscris lui IBC, intersectează din nou CA şi AB în E şi F. Arătaţi că EL şi FJ se intersectează pe cercul ω.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O mulţime, S, de numere naturale nenule se numeşte *completă* dacă, pentru orice număr întreg $0 \leq x < n$, există o submulţime a lui S cu proprietatea că restul împărţirii la n a sumei elementelor submulţimii este x. Se consideră că suma elementelor mulţimii vide este 0. Arătaţi că dacă o mulţime S este completă, atunci există o submulţime (nu neapărat proprie) a lui S care are cel mult $n - 1$ elemente şi care este tot completă.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Stabiliţi dacă există triunghiuri cu lungimile laturilor x, y, z care satisfac
$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Soluţie: Vom arăta că răspunsul este negativ. Presupunem contrariul. Deoarece x, y, z sunt lungimi de laturi de triunghi, avem

$$x + y > z,\ y + z > x,\ z + x > y,$$

deci $(x+y)(y+z)(z+x) = x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz > x^3+y^3+z^3$, contradicţie.

Problema 2. Fie M şi N două numere palindrom, fiecare având 9 cifre. (Un număr palindrom este un număr care se citeşte la fel de la cap la coadă ca şi de la coadă la cap; un număr palindrom nu poate începe cu cifra 0.) Dacă $M < N$ şi nu există numere palindrom între M şi N, aflaţi toate valorile posibile ale lui $N-M$.

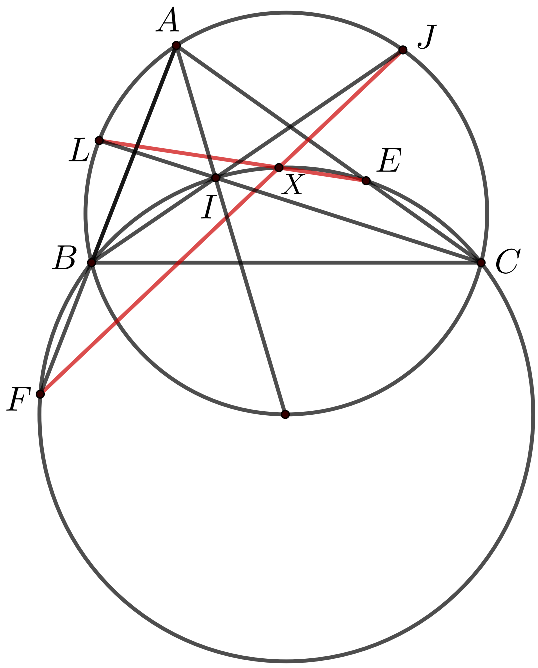
Soluţie: Notăm numărul $M = \overline{abcdedcba}$. Considerăm cazurile:

- Dacă $e \leq 8$, atunci următorul număr palindrom este $N = \overline{abcd(e+1)dcba}$, caz în care $N - M = 10000$.
- Dacă $e = 9$ şi $d \leq 8$, atunci următorul număr palindrom este $N = \overline{abc(d+1)0(d+1)cba}$, caz în care $N - M = 11000$.
- Dacă $d = e = 9$ şi $c \leq 8$, atunci următorul număr palindrom este $N = \overline{ab(c+1)000(c+1)ba}$, caz în care $N - M = 1100$.
- Dacă $c = d = e = 9$ şi $b \leq 8$, atunci următorul număr palindrom este $N = \overline{a(b+1)00000(b+1)a}$, caz în care $N - M = 110$.
- Dacă $b = c = d = e = 9$ şi $a \leq 8$, atunci următorul număr palindrom este $N = \overline{(a+1)0000000(a+1)}$, caz în care $N - M = 11$.

Aşadar, valorile posibile sunt 10000, 11000, 1100, 110 şi 11.

Problema 3. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}$ şi I centrul cercului său înscris. Dreptele IB şi IC intersectează din nou cercul $\mathscr{C}$ în J şi L. Cercul ω, circumscris lui IBC, intersectează din nou CA şi AB în E şi F. Arătaţi că EL şi FJ se intersectează pe cercul ω.

Soluţie: Fie X cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BIC şi IJL. Demonstrăm că $EL \cap FJ = \{X\}$.
Din patrulatere inscriptibile avem $m(\sphericalangle LXI) = m(\sphericalangle LJI) = m(\sphericalangle LJB) = m(\sphericalangle LCB) = m(\sphericalangle LCA) = 180^\circ - m(\sphericalangle EXI)$, ceea ce arată că punctele L, X, E sunt coliniare, adică $X \in EL$. Analog, FJ trece prin X, de unde concluzia problemei.



Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O mulţime, S, de numere naturale nenule se numeşte *completă* dacă, pentru orice număr întreg $0 \leq x < n$, există o submulţime a lui S cu proprietatea că restul împărţirii la n a sumei elementelor submulţimii este x. Se consideră că suma elementelor mulţimii vide este 0. Arătaţi că dacă o mulţime S este completă, atunci există o submulţime (nu neapărat proprie) a lui S care are cel mult $n-1$ elemente şi care este tot completă.

Soluţie: Arătăm că dacă S este o mulţime completă cu cel puţin n elemente, atunci putem înlătura un element din S astfel încât mulţimea rămasă să fie tot completă. Făcând acest lucru în mod repetat, vom obţine o submulţime completă cu $n-1$ elemente. Fie $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ cu un $k \geq n$. Pornim de la mulţimea vidă şi îi tot adăugăm elemente s_i până obţinem mulţimea S. De-a lungul acestui proces urmărim toate posibilele sume ale tuturor submulţimilor.
Dacă T este mulţimea curentă a resturilor la fiecare moment, iar noi adăugăm la submulţimea curentă un element s_i, noua mulţime a resturilor va fi $T \cup \{t + s_i \mid t \in T\}$. În particular, noua mulţime de resturi depinde numai de vechea mulţime de resturi şi de elementul adăugat. La începutul procesului mulţimea resturilor este $\{0\}$ pentru mulţimea vidă. Deoarece S este completă, mulţimea finală de resturi este $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Numărul resturilor creşte de la 1 la n. Pe de altă parte, numărul de elemente creşte de la 0 la $k \geq n$, deci se fac cel puţin n paşi. Prin urmare cel puţin unul dintre paşi nu a modificat numărul de resturi. Acest lucru înseamnă că adăugarea respectivului element nu a contribuit la producerea de noi resturi, astfel că dacă renunţăm să-l mai adăugăm, obţinem tot o mulţime completă, demonstrând afirmaţia noastră.